Brandenburg

Bigalke | Köhler

Mathematik

Gymnasiale Oberstufe

Qualifikationsphase
Leistungskurs

11

Teildruck
Kap. I, Lin. Gleichungssysteme

Cornelsen

Bigalke | Köhler

Mathematik

Redaktion: Dr. Ulf Rothkirch
Layout: Klein und Halm Grafikdesign, Berlin
Bildrecherche: Kai Mehnert

Grafik: Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach
Illustration: Detlev Schüler †, Berlin (18, 26, 92, 98, 107-2, 107-3, 112
Gudrun Lenz, Berlin (63-2, 63-4, 88);
Dr. Anton Bigalke, Waldmichelbach (alle weiteren)
Umschlaggestaltung: Klein und Halm Grafikdesign,
Hans Herschelmann, Berlin
Technische Umsetzung: CMS – Cross Media Solutions GmbH, Würzburg

Bilder aus dem Land Brandenburg
Umschlag: Potsdam, Belvedere
Seite 13: Schloss Babelsberg
Seite 47: Werder/Havel
Seite 83: Potsdam, Chinesisches Haus

www.cornelsen.de

Dieses Werk enthält Vorschläge und Anleitungen für Untersuchungen und Experimente.
Vor jedem Experiment sind mögliche Gefahrenquellen zu besprechen.
Beim Experimentieren sind die Richtlinien zur Sicherheit im Unterricht einzuhalten.

Die Webseiten Dritter, deren Internetadressen in diesem Lehrwerk angegeben sind, wurden vor Drucklegung sorgfältig geprüft. Der Verlag übernimmt keine Gewähr für die Aktualität und den Inhalt dieser Seiten oder solcher, die mit ihnen verlinkt sind.

1. Auflage, 1. Druck 2019

Alle Drucke dieser Auflage sind inhaltlich unverändert
und können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

ISBN 978-3-06-040668-5 (Schülerbuch)
ISBN 978-3-06-040971-6 (E-Book)

PEFC zertifiziert
Dieses Produkt stammt aus nachhaltig bewirtschafteten Wäldern und kontrollierten Quellen.
www.pefc.de
PEFC/04-31-1370

Inhalt

- Wiederholung
- Basis
- Basis/Erweiterung
- Vertiefung

I. Lineare Gleichungssysteme

1. Grundlagen

A. Der Begriff des linearen Gleichungssystems

Lineare Gleichungssysteme besitzen in vielen Bereichen der Mathematik und bei der Lösung naturwissenschaftlicher, technischer und wirtschaftlicher Problemstellungen eine große Bedeutung.
Das wichtigste Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist sehr systematisch aufgebaut, so dass es mit Hilfe von Computern und Taschenrechnern automatisiert werden kann.

Computertomographie
Im Computertomographen wird die Abschwächung von Röntgenstrahlen beim Durchdringen des Körpers gemessen. Daraus gewinnt man lineare Gleichungssysteme, deren Lösungen die Gewebedichten im Körperinnern liefern. Aus diesen lässt sich ein dreidimensionales Bild des Körperinnern errechnen und darstellen.

In diesem ersten Abschnitt wiederholen wir die bereits bekannten Grundlagen beim Lösen linearer Gleichungssysteme, wobei die Beispiele auf den folgenden Seiten sich auf zwei Gleichungen mit zwei Variablen beschränken.

Ein lineares Gleichungssystem (***LGS***) besteht aus einer Anzahl linearer Gleichungen. Nebenstehend ist ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und drei Variablen x, y, z dargestellt. Man spricht hier von einem (4; 3)-LGS.
Die Darstellung ist in der sogenannten ***Normalform*** gegeben: Die variablen Terme stehen auf der linken Seite, die konstanten Terme bilden die rechte Seite.

Ein (4; 3)-LGS in Normalform:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\
2x & + & 3y & + & 2z & = & 14 \\
4x & - & 2y & + & 3z & = & -9 \\
5x & + & 4y & - & 4z & = & 1
\end{array}$$

Koeffizienten der linken Seite

Koeffizienten der rechten Seite

Rechts ist die Normalform eines allgemeinen (m; n)-LGS dargestellt.
Die n Variablen lauten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Die konstanten Terme auf der rechten Seite der Gleichungen lauten $b_1, b_2, \ldots, b_m$.
a_{ij} bezeichnet den Koeffizienten auf der linken Seite des LGS, der in der i-ten Gleichung als Faktor vor der Variablen x_j steht.
Eine Lösung des LGS gibt man oft als geordnete Kombination an, d. h. als ***n-Tupel*** $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, z.B. (3; 1) wie im Beispiel auf der folgenden Seite.

Die Normalform eines (m; n)-LGS:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

B. Das Additionsverfahren bei Gleichungssystemen mit zwei Variablen

Zunächst bringen wir uns ein elementares Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme anhand eines einfachen Beispiels (2 Gleichungen, 2 Variable) in Erinnerung.

Beispiel: Gleichungssystem
Lösen Sie das nebenstehende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & 2x - 4y & = & 2 \\
\text{II} & 5x + 3y & = & 18
\end{array}$$

Lösung:
Wir verwenden das sogenannte Additionsverfahren. Zunächst multiplizieren wir Gleichung I mit −5 und Gleichung II mit 2, sodass die Koeffizienten der Variablen x den gleichen Betrag, aber verschiedene Vorzeichen erhalten.

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & 2x - 4y & = & 2 & \to (-5)\cdot\text{I} \\
\text{II} & 5x + 3y & = & 18 & \to 2\cdot\text{II}
\end{array}$$

So entsteht ein neues Gleichungssystem. Es ist zum Ursprungssystem äquivalent, d. h. lösungsgleich.

$$\begin{array}{lrcll}
\text{I} & -10x + 20y & = & -10 & \\
\text{II} & 10x + 6y & = & 36 & \to \text{I}+\text{II}
\end{array}$$

Nun addieren wir Gleichung I zu Gleichung II. Bei diesem Additionsvorgang wird die Variable x eliminiert. Das entstehende Gleichungssystem ist wiederum äquivalent zum vorhergehenden.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{I} & -10x + 20y & = & -10 \\
\text{II} & 26y & = & 26
\end{array}$$

Gleichung II enthält nun nur noch eine Variable, nämlich y. Auflösen der Gleichung nach y liefert y = 1 als Lösungswert.

Aus II folgt $y = 1$.

Setzen wir dieses Teilresultat in Gleichung I ein, so folgt x = 3.

Einsetzen in I liefert: $x = 3$
Lösungsmenge: $L = \{(3;1)\}$

Die Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beruhen darauf, dass die Anzahl der Variablen pro Gleichung durch Umformungen schrittweise reduziert wird, bis nur noch eine Variable übrig bleibt.
Die verwendeten Umformungen dürfen die Lösungsmenge des Gleichungssystems nicht verändern. Umformungen mit dieser Eigenschaft werden als ***Äquivalenzumformungen*** bezeichnet.
Die drei wesentlichen Äquivalenzumformungen sind nebenstehend aufgeführt.

Äquivalenzumformungen eines Gleichungssystems

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn

(1) 2 Gleichungen vertauscht werden,

(2) eine Gleichung mit einer reellen Zahl $k \neq 0$ multipliziert wird,

(3) eine Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert wird.

Zur Pfeilschreibweise: A → B bedeutet: A wird durch B ersetzt.

Übung 1 Rechnerische Lösung

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme rechnerisch.

a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 4y &= 16 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 6x - 4y &= -2 \\ 4x + 3y &= 10 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - 2y &= 1 \\ 3x + 4y &= 14 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 5x &= y - 3 \\ 2y &= 7 + 9x \end{aligned}$

Übung 2 Zeichnerische Lösung

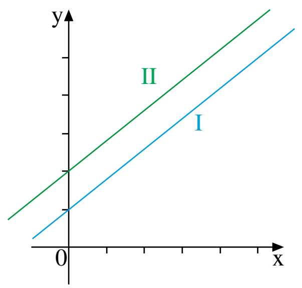
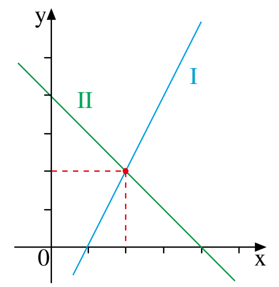
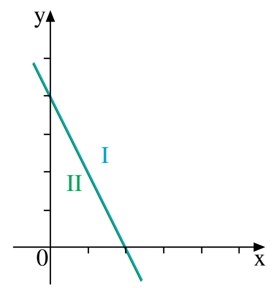
Lösen Sie das LGS zeichnerisch, indem Sie die Gleichungen nach y auflösen und als Geraden darstellen.

a) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 12 \\ 4x - 2y &= 2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x - 3y &= -9 \\ 4x + 6y &= -6 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 6x + 9y &= 14 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 4x + y &= -6 \\ 7x + 2y &= -11 \end{aligned}$

C. Die Anzahl der Lösungen eines Gleichungssystems mit zwei Variablen

Die Gesamtheit der Lösungen (x; y) jeder einzelnen Gleichung eines (2; 2)-LGS bildet eine Gerade im $\mathbb{R}^2$. Damit kann die Frage nach der Anzahl der Lösungen eines (2; 2)-LGS in sehr anschaulicher Weise beantwortet werden.
Die Lösungen eines solchen Gleichungssystems sind die Koordinaten der gemeinsamen Punkte der den Gleichungen zugeordneten Geraden. Geraden haben entweder keine gemeinsamen Punkte oder sie haben genau einen gemeinsamen Punkt oder sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte. Die Zeichnungen unten veranschaulichen den Sachverhalt.
Entsprechend ist ein lineares Gleichungssystem entweder ***unlösbar*** oder es ist ***eindeutig lösbar*** oder es hat ***unendlich viele Lösungen***, ist also ***nicht eindeutig lösbar***.
Dies gilt nicht nur für Gleichungssysteme mit zwei Variablen, sondern für alle LGS.

I $2x - 2y = -2$ II $-3x + 3y = 6$	I $2x - y = 2$ II $3x + 3y = 12$	I $8x + 4y = 16$ II $-6x - 3y = -12$
		
Die Geraden sind parallel. Sie haben keine gemeinsamen Punkte. **Das Gleichungssystem ist unlösbar.**	Die Geraden schneiden sich in einem Punkt. **Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.**	Die Geraden sind identisch. Sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte. **Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.**

Auch mit Hilfe des Additionsverfahrens kann man erkennen, welcher der drei bezüglich der Lösbarkeit möglichen Fälle vorliegt. Den Fall der eindeutigen Lösbarkeit haben wir bereits geübt (vgl. Abschnitt B). Die restlichen Fälle behandeln wir nun exemplarisch.

Beispiel: Lösbarkeit

Untersuchen Sie die Gleichungssysteme mit Hilfe des Additionsverfahrens auf Lösbarkeit.

a) $\begin{aligned} 2x - 2y &= -3 \\ -3x + 3y &= 9 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 8x + 4y &= 16 \\ -6x - 3y &= -12 \end{aligned}$

Lösung zu a:

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & 2x - 2y = -3 & \rightarrow 3 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} & -3x + 3y = 9 & \rightarrow 2 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & 6x - 6y = -9 & \\ \mathrm{II} & -6x + 6y = 18 & \rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \mathrm{I} & 6x - 6y = -9 \\ \mathrm{II} & 0x + 0y = 9 \end{array}$$

Die Äquivalenzumformungen führen auf ein Gleichungssystem, dessen Gleichung II für kein Paar x, y lösbar ist, da sie $0 = 9$ lautet.
Sie stellt einen Widerspruch in sich dar.

Da eine Gleichung des Systems keine Lösung besitzt, hat das Gleichungssystem als Ganzes erst recht keine Lösungen.
Man spricht von einem unlösbaren Gleichungssystem. Die Lösungsmenge des Systems ist die leere Menge:
$L = \{\ \}$.

Lösung zu b:

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & 8x + 4y = 16 & \rightarrow 3 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} & -6x - 3y = -12 & \rightarrow 4 \cdot \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{I} & 24x + 12y = 48 & \\ \mathrm{II} & -24x - 12y = -48 & \rightarrow \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \mathrm{I} & 24x + 12y = 48 \\ \mathrm{II} & 0x + 0y = 0 \end{array}$$

Die Umformungen führen auf ein äquivalentes System, dessen Gleichung II für alle Paare x, y trivialerweise erfüllt ist, da sie $0 = 0$ lautet. Sie kann also auch weggelassen werden.

In der verbleibenden Gleichung I kann eine der Variablen frei gewählt werden. Sei etwa $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$).
Dann folgt $y = -2c + 4$. Für jeden Wert des Parameters c ergibt sich eine Lösung. Man spricht von einer einparametrigen unendlichen Lösungsmenge:
$L = \{(c; -2c + 4); c \in \mathbb{R}\}$.

Übung 3 Lösbarkeit

Untersuchen Sie das Gleichungssystem auf Lösbarkeit. Geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $\begin{aligned} 8x - 3y &= 11 \\ 5x + 2y &= 34 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 2y &= 13 \\ 2x - 5y &= -4 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 8x - 6y &= 2 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} -4x + 14y &= 6 \\ 6x - 21y &= 8 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 12x + 16y &= 28 \\ 15x + 20y &= 35 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 3x - 4y &= 14 \\ 2x + 3y &= -2 \\ x + 10y &= -18 \end{aligned}$ g) $\begin{aligned} 4x - 2y &= 8 \\ 3x + y &= 11 \\ 6x - 8y &= 1 \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} 3x - 6y &= 9 \\ -2x + 4y &= -6 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}$

Übung 4 LGS mit Parameter

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ liegt eindeutige Lösbarkeit vor?

a) $\begin{aligned} 2x - 5y &= 9 \\ 4x + ay &= 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3x + 4y &= 7 \\ 2x - 6y &= a + 12 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} ax + 2y &= 5 \\ 8x + ay &= 10 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} ax - 2y &= a \\ 2x - ay &= 2 \end{aligned}$

Übungen

5. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Additionsverfahrens.

a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} -3x + 4y &= -1 \\ 4x - 2y &= 8 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 1{,}2x - 0{,}5y &= 5 \\ 3{,}4x - 1{,}5y &= 14 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2 - 2x &= 2y - 4 \\ 6x - 4 &= 6y + 2 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} y - 3x - 3 &= 2y \\ 4 - 4x + y &= 8 - 3y \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} 13 - x + 4y &= 0 \\ 24 - 2(x - y) &= 10 \end{aligned}$

6. Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} x - \tfrac{1}{3}y &= 3 \\ x + 2y &= -4 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x + 4y &= -4 \\ -0{,}5x - y &= 1 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} -6x + 3y &= 3 \\ 4x - 2y &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -2x + 6y &= -2 \\ x - 3y &= 1 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} 2x + 4y &= 10 \\ 4x - 4y &= 8 \\ 3x - 2y &= 7 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} x + 6y &= 21 \\ -x + y &= 0 \\ x - y &= -5 \end{aligned}$

7. Bestimmen Sie die Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die die LGS eindeutig lösbar sind.

a) $\begin{aligned} 3x - 5y &= 4 \\ ax + 10y &= 5 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4x - 2y &= a \\ 3x + 4y &= 7 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} ax + 3y &= 8 \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned}$

8. Eine zweistellige Zahl ist siebenmal so groß wie ihre Quersumme. Vertauscht man die beiden Ziffern, so erhält man eine um 27 kleinere Zahl. Wie heißt diese zweistellige Zahl?

9. (3; 2)-LGS wie in 6e) und f) beschreiben die Lage von drei Geraden in $\mathbb{R}^2$ zueinander. Erstellen Sie zu folgenden Situationen eine Skizze und geben Sie dazu ein Beispiel für ein (3; 2)-LGS an.

a) Drei Geraden sind nicht paarweise parallel zueinander. Es gibt keinen Punkt, in dem sich alle drei Geraden schneiden.

b) Drei Geraden sind nicht paarweise parallel zueinander. Es gibt einen Punkt, in dem sich alle drei Geraden schneiden.

c) Zwei Geraden sind parallel zueinander. Eine dritte Gerade schneidet die beiden Parallelen.

d) Drei Geraden sind parallel zueinander, aber nicht identisch.

10. Wie alt sind Max und Moritz jetzt?

2. Das Lösungsverfahren von Gauß

Carl Friedrich Gauß (1777–1855) war ein deutscher Mathematiker und Astronom, der sich bereits in frühester Jugend durch überragende Intelligenz auszeichnete. Fast 50 Jahre lang war er als Mathematikprofessor an der Uni Göttingen tätig. Neben der Mathematik beschäftigte er sich vor allem mit der Astronomie. Durch eine neue Berechnung der Umlaufbahnen von Himmelskörpern konnte der 1801 entdeckte und gleich wieder aus dem Blick verlorene Planet Ceres wieder aufgefunden werden. Hierbei entwickelte er auch das nach ihm benannte Lösungsverfahren für Gleichungssysteme, das er 1809 in seinem Buch „Theoria motus corporum coelestium" (Theorie der Bewegung der Himmelskörper) veröffentlichte.

A. Dreieckssysteme

Beispiel: Dreieckssystem

Das gegebene Gleichungssystem hat eine besondere Gestalt, denn die von null verschiedenen Koeffizienten sind in Gestalt eines Dreiecks angeordnet. Lösen Sie dieses Dreieckssystem.

Ein Dreieckssystem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{I} & 3x & - & 2y & + & 4z & = & 11 \\ \text{II} & & & 4y & + & 2z & = & 14 \\ \text{III} & & & & & 5z & = & 15 \end{array}$$

Lösung:

Dreieckssysteme sind wegen ihrer besonderen Gestalt sehr einfach zu lösen:

Lösen eines Dreieckssystems durch ***Rückeinsetzung***:

1. Wir lösen Gleichung III nach z auf und erhalten z = 3.

Auflösen von III nach z:

$$\begin{aligned} 5z &= 15 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

2. Dieses Ergebnis setzen wir in Gleichung II ein, die sodann nach y aufgelöst werden kann. Wir erhalten y = 2.

Einsetzen in II:
Auflösen nach y:

$$\begin{aligned} 4y + 2z &= 14 \\ 4y + 6 &= 14 \\ 4y &= 8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

3. Nun setzen wir z = 3 und y = 2 in Gleichung I ein, die anschließend nach x aufgelöst werden kann: x = 1.

Einsetzen in I:
Auflösen nach x:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= 11 \\ 3x - 4 + 12 &= 11 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Resultat: Das gegebene Dreieckssystem ist ***eindeutig lösbar***.

Die Lösung ist (1; 2; 3).

Lösungsmenge: $L = \{(1; 2; 3)\}$

B. Der Gaußsche Algorithmus

Im Folgenden zeigen wir das besonders systematische Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme von Gauß, das als Gaußscher Algorithmus oder als Gaußsches Eliminationsverfahren bezeichnet wird. Wegen seiner algorithmischen Struktur ist es hervorragend für die numerische Bearbeitung mittels Computer geeignet.

Die Grundidee von Gauß war sehr einfach: Mit Hilfe von Äquivalenzumformungen (vgl. Abschnitt 1. B) wird das lineare Gleichungssystem in ein Dreieckssystem umgewandelt. Dieses wird anschließend durch „Rückeinsetzung" gelöst.

Beispiel: Dreieckssystem/ Rückeinsetzung

Formen Sie das lineare Gleichungssystem (LGS) in ein Dreieckssystem um und lösen Sie dieses.

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 3x + 3y + 2z & = & 5 \\ \text{II} & 2x + 4y + 3z & = & 4 \\ \text{III} & -5x + 2y + 4z & = & -9 \end{array}$$

Lösung:
Die außerhalb des blauen Dreiecks stehenden Terme stören auf dem Weg zum Dreieckssystem. Sie sollen durch Äquivalenzumformungen schrittweise eliminiert werden.
Als Darstellungsmittel verwenden wir den Umformungspfeil, der angibt, wodurch die Gleichung ersetzt wird, von welcher dieser Pfeil ausgeht.

1. Wir eliminieren die Variable x aus den Gleichungen II und III.
   Wir erreichen dies, indem wir zu geeigneten Vielfachen dieser Gleichung geeignete Vielfache von Gleichung I addieren oder subtrahieren.
2. Wir eliminieren die Variable y aus der Gleichung III des neu entstandenen Systems in entsprechender Weise.
3. Es ist nun wieder ein Dreieckssystem entstanden, das wir leicht durch „Rückeinsetzung" lösen können.

Umformen des LGS:

1. Elimination von x

$$\begin{array}{lrcrl} \text{I} & 3x + 3y + 2z & = & 5 & \\ \text{II} & 2x + 4y + 3z & = & 4 & \rightarrow 3 \cdot \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} & -5x + 2y + 4z & = & -9 & \rightarrow 3 \cdot \text{III} + 5 \cdot \text{I} \end{array}$$

2. Elimination von y

$$\begin{array}{lrcrl} \text{I} & 3x + 3y + 2z & = & 5 & \\ \text{II} & 6y + 5z & = & 2 & \\ \text{III} & 21y + 22z & = & -2 & \rightarrow 2 \cdot \text{III} - 7 \cdot \text{II} \end{array}$$

Dreieckssystem

$$\begin{array}{lrcr} \text{I} & 3x + 3y + 2z & = & 5 \\ \text{II} & 6y + 5z & = & 2 \\ \text{III} & 9z & = & -18 \end{array}$$

Auflösen von III nach z: 3. Lösen durch Rückeinsetzung

$$9z = -18$$
$$z = -2$$

Einsetzen in II, Auflösen nach y:

$$6y + 5z = 2$$
$$6y - 10 = 2$$
$$y = 2$$

Einsetzen in I, Auflösen nach x:

$$3x + 3y + 2z = 5$$
$$3x + 6 - 4 = 5$$
$$x = 1$$

Resultat: $L = \{(1; 2; -2)\}$

In entsprechender Weise lassen sich auch lineare Gleichungssysteme mit größerer Anzahl von Gleichungen und Variablen lösen. Es kommt darauf an, die störenden Terme in systematischer Weise, z. B. spaltenweise, zu eliminieren, sodass eine ***Dreiecksform*** bzw. ***Stufenform*** entsteht.

Übungen

1. Dreiecksform

Lösen Sie das LGS. Formen Sie das LGS ggf. zunächst in ein Dreieckssystem um.

a) $\begin{array}{rcr} 2x + 4y - z & = & -13 \\ 2y - 2z & = & -12 \\ 3z & = & 9 \end{array}$
b) $\begin{array}{rcr} 2x + 4y - 3z & = & 3 \\ -6y + 5z & = & 7 \\ 2z & = & 4 \end{array}$
c) $\begin{array}{rcr} 3x - 2y + 2z & = & 6 \\ 2x - z & = & 2 \\ -3x & = & -6 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcr} x - 3y + 5z & = & -2 \\ y + 2z & = & 8 \\ y + z & = & 6 \end{array}$
e) $\begin{array}{rcr} x + y + 4z & = & 10 \\ 2y - 5z & = & -14 \\ y + 3z & = & 4 \end{array}$
f) $\begin{array}{rcr} 2x + 2y - z & = & 8 \\ -2x + y + 2z & = & 3 \\ 4z & = & 8 \end{array}$

2. Gaußscher Algorithmus

Lösen Sie das LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.

a) $\begin{array}{rcr} 4x - 2y + 2z & = & 2 \\ -2x + 3y - 2z & = & 0 \\ 3x - 5y + z & = & -7 \end{array}$
b) $\begin{array}{rcr} x + 2y - 2z & = & -4 \\ 2x + y + z & = & 3 \\ 3x + 2y + z & = & 4 \end{array}$
c) $\begin{array}{rcr} 2x + 2y - 3z & = & -7 \\ -x - 2y - 2z & = & 3 \\ 4x + y - 2z & = & -1 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcr} 2x + y - z & = & 6 \\ 5x - 5y + 2z & = & 6 \\ 3x + 2y - 3z & = & 0 \end{array}$
e) $\begin{array}{rcr} x - 2y + z & = & 0 \\ 3y + z & = & 9 \\ 2x + y & = & 4 \end{array}$
f) $\begin{array}{rcr} 2x + 2y + 3z & = & -2 \\ x + z & = & -1 \\ y + 2z & = & -3 \end{array}$

3. Gaußscher Algorithmus

Lösen Sie das LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. Bringen Sie das LGS zunächst auf Normalform. (Erzeugen Sie zweckmäßigerweise auch ganzzahlige Koeffizienten.)

a) $\begin{array}{rcl} 2y & = & 4 - z \\ 3z & = & x - 10 \\ 9 + z & = & x + y \end{array}$
b) $\begin{array}{rcl} 2y - 5 & = & z + 2x \\ -2z & = & x - 2y \\ 4x & = & y - 10 \end{array}$
c) $\begin{array}{rcl} 3z & = & 2y + 7 \\ x - 4 & = & y + z \\ 2x + 2y & = & x - 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcr} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z & = & 4 \\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z & = & -2 \\ y - \frac{1}{2}z & = & 2 \end{array}$
e) $\begin{array}{rcr} -0{,}2x + 1{,}5y + 0{,}4z & = & -9 \\ 1{,}1x + 2{,}2z & = & 8{,}8 \\ 0{,}8x - 0{,}2y & = & 4{,}4 \end{array}$
f) $\begin{array}{rcr} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y + \frac{2}{3}z & = & 7 \\ \frac{3}{8}x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{12}z & = & \frac{5}{2} \\ 4{,}5x - 0{,}5y + \frac{1}{3}z & = & 17{,}5 \end{array}$

4. Zahlenrätsel

Eine dreistellige natürliche Zahl hat die Quersumme 14. Liest man die Zahl von hinten nach vorn und subtrahiert 22, so erhält man eine doppelt so große Zahl. Die mittlere Ziffer ist die Summe der beiden äußeren Ziffern. Berechnen Sie die gesuchte Zahl.

5. Modellierung einer Parabel

Eine Parabel zweiten Grades besitzt bei x = 1 eine Nullstelle und im Punkt P(2|6) die Steigung 8. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

6. Nichtlineares Gleichungssystem

Neben den linearen Gleichungssystemen gibt es auch nichtlineare Gleichungssysteme. Bei solchen Systemen funktioniert der Gaußsche Algorithmus nicht. Man verwendet das Einsetzungsverfahren oder Näherungsverfahren. Lösen Sie das nichtlineare System.

a) $\begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 16 \\ x^2 + y^2 & = & 29 \end{array}$
b) $\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 14 \\ x + y & = & 3 \\ x^2 + z^2 & = & 10 \end{array}$

3. Lösbarkeitsuntersuchungen

A. Unlösbare und nicht eindeutig lösbare LGS

Wir untersuchen nun mit dem Gaußschen Algorithmus lineare Gleichungssysteme, die keine Lösung besitzen bzw. die unendlich viele Lösungen haben.

Beispiel: Untersuchen Sie das LGS mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus auf Lösbarkeit.

a)
$$\begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 3x + 11y - 7z = 6 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} 2x + y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - 7z = 1 \\ 4x - 3y + 2z = 7 \end{array}$$

Lösung zu a:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x + 2y - z = 3 & \\ \text{II} & 2x - y + 2z = 8 & \rightarrow \text{II} - 2\cdot\text{I} \\ \text{III} & 3x + 11y - 7z = 6 & \rightarrow \text{III} - 3\cdot\text{I} \\ \hline \text{I} & x + 2y - z = 3 & \\ \text{II} & -5y + 4z = 2 & \\ \text{III} & 5y - 4z = -3 & \rightarrow \text{III} + \text{II} \\ \hline \text{I} & x + 2y - z = 3 & \\ \text{II} & 5y - 4z = -2 & \\ \text{III} & 0 = -1 & \end{array}$$

↑ Widerspruchszeile

Gleichung III des Dreieckssystems wird als ***Widerspruchszeile*** bezeichnet. Sie ist unlösbar ($0x + 0y + 0z = -1$ ist für **kein** Tripel (x; y; z) erfüllt).

Damit ist das Dreieckssystem als Ganzes unlösbar.
Es folgt: Das ursprüngliche LGS ist ebenfalls ***unlösbar***, die Lösungsmenge ist daher leer: $L = \{\}$.

Die Unlösbarkeit eines LGS wird nach Anwendung des Gaußschen Algorithmus stets auf diese Weise offenbar:

Wenigstens in einer Gleichung des resultierenden Dreieckssystems tritt ein offensichtlicher Widerspruch auf.

Lösung zu b:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 2x + y - 4z = 1 & \\ \text{II} & 3x + 2y - 7z = 1 & \rightarrow 2\cdot\text{II} - 3\cdot\text{I} \\ \text{III} & 4x - 3y + 2z = 7 & \rightarrow \text{III} - 2\cdot\text{I} \\ \hline \text{I} & 2x + y - 4z = 1 & \\ \text{II} & y - 2z = -1 & \\ \text{III} & -5y + 10z = 5 & \rightarrow \text{III} + 5\cdot\text{II} \\ \hline \text{I} & 2x + y - 4z = 1 & \\ \text{II} & y - 2z = -1 & \\ \text{III} & 0 = 0 & \end{array}$$

↑ Nullzeile

Gleichung III des Gleichungssystems wird als ***Nullzeile*** bezeichnet. Sie ist für jedes Tripel (x; y; z) erfüllt, stellt keine Einschränkung dar und kann daher auch weggelassen werden.

Es verbleiben 2 Gleichungen mit 3 Variablen, von denen daher eine Variable frei wählbar ist. Wir setzen für diese „überzählige" Variable einen Parameter ein.

Wählen wir $z = c \quad (c \in \mathbb{R})$,
so folgt aus II $y = 2c - 1$
und dann aus I $x = c + 1$.

Wir erhalten für jeden Wert des freien Parameters c genau ein Lösungstripel (x; y; z). Das Gleichungssystem hat eine ***einparametrige unendliche Lösungsmenge***:
$L = \{(c + 1;\ 2c - 1;\ c);\ c \in \mathbb{R}\}$.

Übung 1 Lösbarkeitsuntersuchung

Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a)
$$\begin{array}{l} 2x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + y - z = 2 \\ 4x + 3y + z = 8 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} 3x + 5y - 2z = 10 \\ 2x + 8y - 5z = 6 \\ 4x + 2y + z = 8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} 4x - 3y - 5z = 9 \\ 2x + 5y - 9z = 11 \\ 6x - 11y - z = 7 \end{array}$$

B. Unter- und überbestimmte LGS

Alle bisher durchgeführten Überlegungen zur Lösbarkeit bezogen sich auf den Sonderfall, dass die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmt. Im Folgenden zeigen wir exemplarisch, dass sie jedoch sinngemäß für jedes beliebige LGS gelten.
Enthält ein LGS weniger Gleichungen als Variablen, so reichen die Informationen für eine eindeutige Lösung nicht aus, d.h., es ist ***unterbestimmt***. Enthält ein LGS hingegen mehr Gleichungen als Variablen, so würden für eine eindeutige Lösung bereits weniger Gleichungen genügen. In diesem Fall ist das LGS ***überbestimmt***. Wir zeigen die Vorgehensweisen bei derartigen LGS an zwei Beispielen.

Beispiel: Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a)
$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 2y + 3z = 8 \\ \text{II} & 2x + 3y + 2z = 9 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x - y = 8 \\ x - 2y = 5 \end{array}$$

Lösung zu a:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x + 2y + 3z = 8 & \\ \text{II} & 2x + 3y + 2z = 9 & \rightarrow 2\cdot\text{I} - \text{II} \\ \hline \text{I} & x + 2y + 3z = 8 & \\ \text{II} & y + 4z = 7 & \end{array}$$

Das LGS ist unterbestimmt. Da die Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf keinen Widerspruch führt, besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.
Da das LGS in Stufenform nur zwei Gleichungen enthält, aber drei Variable vorhanden sind, ersetzen wir die überzählige Variable z durch den Parameter c: $z = c$.
Aus II folgt dann: $y + 4c = 7$, $y = 7 - 4c$
Durch Einsetzen in I erhalten wir nun
$x + 2(7 - 4c) + 3c = 8$, d. h. $x = -6 + 5c$.
Das LGS hat also die einparametrige unendliche Lösungsmenge:
$L = \{(-6 + 5c;\ 7 - 4c;\ c);\ c \in \mathbb{R}\}$

Lösung zu b:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x + y = 1 & \\ \text{II} & 2x - y = 8 & \rightarrow (-2)\cdot\text{I} + \text{II} \\ \text{III} & x - 2y = 5 & \rightarrow \text{I} - \text{III} \\ \hline \text{I} & x + y = 1 & \\ \text{II} & -3y = 6 & \\ \text{III} & 3y = -4 & \rightarrow \text{II} + \text{III} \\ \hline \text{I} & x + y = 1 & \\ \text{II} & -3y = 6 & \\ \text{III} & 0 = 2 & \text{Widerspruch} \end{array}$$

Wendet man den Gaußschen Algorithmus an, erhält man die obige ***Stufenform***. Da die Gleichung III einen Widerspruch enthält, ist das gesamte LGS unlösbar, obwohl das Teilsystem aus den ersten beiden Gleichungen eine eindeutige Lösung $(x = 3;\ y = -2)$ besitzt. Diese erfüllt jedoch die Gleichung III nicht. Somit erhalten wir als Resultat:
$L = \{\ \}$.

Übung 2 Lösbarkeitsuntersuchung/Lösungsmenge

Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} 3x - 3y &= 0 \\ 6x + 3y &= 18 \\ -2x + 4y &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -2x + y &= -1 \\ 4x + 2y &= -10 \\ -6x + 3y &= -2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x - 2y &= 14 \\ 3x + 6y &= 3 \\ 4x - 12y &= 44 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 5 \\ 2x - y - z &= 0 \\ 4x - 2y - z &= 12 \\ x - y + z &= 10 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x + z &= -1 \\ y + z &= 4 \\ x + y &= 5 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 4x + y - 2z + t &= 1 \\ 2x + y + 3z - 2t &= 3 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ -6x - 4y - 2z &= 8 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 2x + 3z + 2t &= 4 \\ y + 3z + 2t &= 4 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= 6 \\ x - 8y + 4z &= 12 \\ -x + 2y - z &= -3 \end{aligned}$

Die Lösbarkeitsuntersuchungen haben gezeigt, dass Nullzeilen (triviale Zeilen) noch nichts über die Lösbarkeit des gesamten LGS aussagen, während aus einer Widerspruchszeile sofort die Unlösbarkeit des gesamten LGS folgt. Wir können zusammenfassend folgendes Lösungsschema zum Gaußschen Algorithmus angeben:

<table>
<tr><th colspan="4">Lösungsschema des Gaußschen Algorithmus</th></tr>
<tr><td>1.</td><td colspan="3">LGS in die Normalform überführen,
ganzzahlige Koeffizienten erzeugen, sofern möglich.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="3">Gaußschen Algorithmus auf das LGS anwenden. Es entsteht eine Dreiecks- bzw. Stufenform.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="3">Prüfen, welche der folgenden Eigenschaften das aus 2. resultierende LGS besitzt.</td></tr>
<tr><td></td><td>Widerspruch

Wenigstens eine Gleichung stellt einen offensichtlichen Widerspruch dar.</td><td colspan="2">Es existiert kein Widerspruch.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Die Anzahl der Variablen ist gleich der Anzahl der nichttrivialen Zeilen.</td><td>Es gibt mehr Variable als nichttriviale Zeilen.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Das LGS ist
unlösbar.</td><td>Das LGS ist
eindeutig lösbar.</td><td>Das LGS hat
unendlich viele Lösungen.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Die einzige Lösung wird durch „Rückeinsetzung“ aus dem Stufenform-LGS bestimmt.</td><td>Die freien Parameter werden festgelegt.
Die Parameterdarstellung der Lösungsmenge wird bestimmt.</td></tr>
</table>

Übungen

3. Lösen Sie das LGS. Geben Sie die Lösungsmenge an.

a) $\begin{aligned} 2x - y + 6z &= 5 \\ 2y - 3z &= 10 \\ 4z &= 8 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x + y + 7z &= 2 \\ y + 2z &= 1 \\ 3y + 5z &= 4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x - y + z &= 3 \\ 2y - 2z &= 0 \\ -5x + z &= -2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + 2y - z &= -3 \\ 2x + 4y - 2z &= -1 \\ 3x + y + 5z &= 6 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} -2x + 2y - 4z &= -2 \\ x + 3z &= 0 \\ x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x - y + z &= 1 \\ -2x - 3z &= -3 \end{aligned}$

4. Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} 3x - 8y - 5z &= 0 \\ 2x - 2y + z &= -1 \\ x + 4y + 7z &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - 2y - 3z &= -1 \\ -2y + z &= -3 \\ -x + y - 3z &= -4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x - y + 2z &= 6 \\ x + 2y - z &= 6 \\ 6x + 3y &= 18 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x - 3y - 8z &= 8 \\ 6y + 4z &= -8 \\ 6x + 8y - 8z &= 6 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 4 \\ 4x - 6y + 4z &= 10 \\ -x - 2y &= 1 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 5 \\ 2x - y - z &= 0 \\ 4x - 2y - 2z &= 12 \end{aligned}$

5. Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit. Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= -3 \\ x_4 - x_1 &= x_3 \\ x_4 - x_2 &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_3 &= x_2 \\ x_2 + x_5 &= x_4 \\ x_5 - x_3 &= 0 \\ x_4 - x_2 &= x_3 \\ x_4 - x_1 &= x_3 + x_5 \end{aligned}$

6. Robert, Alfons und Edel finden einen Sack voller Münzen. Es sind 3 große, 16 mittlere und 40 kleine Münzen im Gesamtwert von 30 €. Die Münzen werden gerecht aufgeteilt. Robert erhält 2 große und 30 kleine Münzen, Alfons erhält 8 mittlere und 10 kleine Münzen. Den Rest erhält Edel. Wie groß sind die einzelnen Münzwerte?

7. Im Garten sitzen Schnecken, Raben und Katzen. Großvater zählt die Köpfe und die Füße der Tiere. Er kommt auf insgesamt 39 Köpfe und 57 Füße. Die Raben haben zusammen 6 Füße mehr als die Katzen. Wie viele Katzen sind es?

4. Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Gelegentlich tritt in linearen Gleichungssystemen ein zusätzlicher Parameter auf. Dann hängt die Lösbarkeit des Systems vom Wert des Parameters ab.

Beispiel: Lineares Gleichungssystem mit Parameter

Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit ($a \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ ax + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Lösung:

Wir wenden den Gaußschen Algorithmus an.

Nach dem ersten Eliminationsschritt erhalten wir ein Dreieckssystem.

Um die Gleichung II des Dreieckssystems nach y auflösen zu können, müssen wir durch den Koeffizienten $(3 - a)$ dividieren.

Dies ist nur möglich, wenn $(3 - a)$ nicht null ist, also für $a \neq 3$.

Daher unterscheiden wir nun die beiden Fälle $a \neq 3$ und $a = 3$.

Im ersten Fall erhalten wir eine vom Parameter a abhängige eindeutige Lösung.

Sie lautet: $x = \frac{1}{3-a}$, $y = \frac{5-2a}{3-a}$

Im zweiten Fall $(a = 3)$ tritt ein Widerspruch auf.

Das System ist dann also unlösbar.

Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 2 \\ \text{II} & ax + 3y = 5 \rightarrow \text{II} - a \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 2 \\ \text{II} & (3 - a)y = 5 - 2a \end{array}$$

Fall 1: $a \neq 3$

aus II: $y = \frac{5-2a}{3-a}$

in I: $x = 2 - y = 2 - \frac{5-2a}{3-a} = \frac{6-2a}{3-a} - \frac{5-2a}{3-a} = \frac{1}{3-a}$

Fall 2: $a = 3$

II: $(3 - a)y = 5 - 2a \Rightarrow 0 = -1$

$\Rightarrow$ unlösbar

Übung 1 LGS mit Parameter

Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit ($a \in \mathbb{R}$). Geben Sie ggf. die Lösung an.

a) $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + ay &= 5 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ x + y &= 2a \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + ay &= 2a \\ 2x + 2y &= 2a + 2 \end{aligned}$

Übung 2 Unendliche Lösungsmenge

Ermitteln Sie, wie der Parameter a gewählt werden muss, damit das LGS unendlich viele Lösungen hat. Geben Sie diese an.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 14 \\ 4x + ay &= 30 - a \end{aligned}$$

Übung 3 Parameterbestimmung

Ermitteln Sie, für welchen Wert des Parameters a das LGS die Lösung $x = 4$, $y = 8$ hat. Berechnen Sie die allgemeine Lösung des LGS.

$$\begin{aligned} 4x + y &= 6a \\ x + 2y &= 5a \end{aligned}$$

Bei linearen Gleichungssystemen mit drei oder mehr Variablen geht man im Prinzip genauso vor wie im vorhergehenden Beispiel. Relativ einfach ist die Untersuchung solcher Systeme, wenn der Parameter nur auf der rechten Seite des Gleichungssystems auftritt.

Beispiel: Lineares (3; 3)-Gleichungssystem mit Parameter

Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit ($a \in \mathbb{R}$).

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 2y - 3z = 4 \\ \text{II} & 2x + 2y + 2z = 6a + 4 \\ \text{III} & 3x - y - 2z = -2 \end{array}$$

Lösung zu a:

Wir wenden den Gaußschen Algorithmus an. Die einzelnen Schritte sind rechts dargestellt.

Nach zwei Eliminationsschritten erhalten wir ein Dreieckssystem.

Dieses lösen wir durch Rückwärtseinsetzungen auf.

Zunächst bestimmen wir aus Gleichung III durch Auflösen die Variable z: $z = a$

Dieses Teilergebnis setzen wir in Gleichung II ein und lösen diese anschließend nach y auf: $y = a + 2$.

Durch Einsetzen beider Teilergebnisse in Gleichung I können wir auch den Wert der Variablen x errechnen: $x = a$.

Das Gleichungssystem ist also für jeden Wert des Parameters a eindeutig lösbar. Die Lösung lautet: $x = a$, $y = a + 2$, $z = a$

Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 2y - 3z = 4 \\ \text{II} & 2x + 2y + 2z = 6a + 4 \rightarrow \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} & 3x - y - 2z = -2 \rightarrow \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 2y - 3z = 4 \\ \text{II} & -2y + 8z = 6a - 4 \\ \text{III} & -7y + 7z = -14 \rightarrow 2 \cdot \text{III} - 7 \cdot \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + 2y - 3z = 4 \\ \text{II} & -2y + 8z = 6a - 4 \\ \text{III} & -42z = -42a \end{array}$$

Aus III: $\Rightarrow z = a$

In II: $\Rightarrow -2y + 8a = 6a - 4 \Rightarrow y = a + 2$

In I: $\Rightarrow x + 2 \cdot (a + 2) - 3a = 4 \Rightarrow x = a$

$L = \{(a \mid a + 2 \mid a) : a \in \mathbb{R}\}$

Übung 4 (3; 3)-LGS mit Parameter

Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit ($a \in \mathbb{R}$). Geben Sie ggf. die Lösung an.

a) $\begin{array}{ll} \text{I} & x + y - 2z = 2 \\ \text{II} & 2x - 2y + z = a - 1 \\ \text{III} & 4x + y - 3z = 2a + 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I} & 2x - y + z = 1 \\ \text{II} & x + 2y - z = 4a - 1 \\ \text{III} & 4x - y + 3z = 3 \end{array}$

Übung 5 Unendliche Lösungsmenge

Ermitteln Sie, unter welcher Bedingung an den Parameter a das LGS unendlich viele Lösungen hat. Berechnen Sie die Lösung.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x - y + z = 3 \\ \text{II} & x + 2y - z = 4 \\ \text{III} & 4x + 3y - z = a + 1 \end{array}$$

Übung 6 LGS mit Parameterbestimmung

Berechnen Sie die allgemeine Lösung des LGS. Ermitteln Sie, für welchen Wert des Parameters a das LGS eine Lösung x, y, z mit $x = 6$ hat.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -x + 2y + 3z = 6 \\ \text{II} & +x - 3y + 2z = 4 - a \\ \text{III} & -x + 4y - 2z = 2a - 4 \end{array}$$

5. Lösung eines LGS mit einem Computerprogramm

Ein Taschenrechner mit erweiterter Funktionalität beherrscht nur lineare Gleichungssysteme mit der Ordnung 3 oder kleiner. Für größere LGS verwendet man ein Computerprogramm (Applet), einen graphischen Taschenrechner (GTR) oder ein Computeralgebrasystem (CAS).
Wir behandeln als Beispiel die Verwendung eines Programms in Gestalt eines Applets.

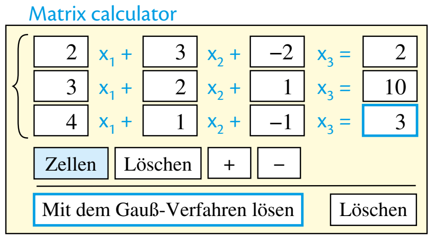
Beispiel: Lösung von LGS mit einem Computerprogramm
Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit einem Computerprogramm.

a) $2x + 3y - 2z = 2$
$3x + 2y + z = 10$
$4x + y - z = 3$

b) $2x + y + 3z + t = 6$
$4x + 2y + 2z + 2t = 8$
$2x + 2y + 2z + 2t = 6$

Lösung:
Wir rufen das Applet auf der Internetseite* auf und wählen Gleichungssystem. Es erscheint eine rechteckige Maske zur Eingabe der Koeffizienten des LGS. Die Größe der Maske entspricht der Ordnung des LGS und kann eingegeben werden. In unserem Fall kann die Maske mit dem Feld [+] vergrößert und dem Feld [–] verkleinert werden.
Nicht benötigte Zeilen/Spalten bleiben einfach leer (siehe Teil b).
Die Berechnung der Lösung wird durch Anklicken des Feldes [Lösen] gestartet. Mit dem Feld [Löschen] alles gelöscht.

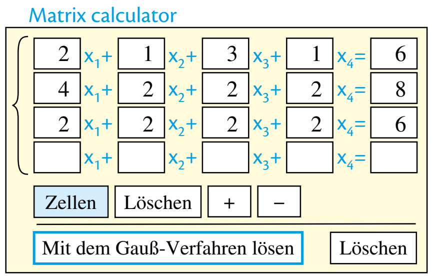
1. Appletoberfläche im Fall a:



Ergebnis: ○ $x_1 = 1$
○ $x_2 = 2$
○ $x_3 = 3$

Lösung zu a:
Wir erhalten eine eindeutige Lösung:
$x = 1, y = 2, z = 3$.

2. Appletoberfläche im Fall b:



Ergebnis: ○ $x_1 = 1$
○ $x_2 = 1 - x_4$
○ $x_3 = 1$
○ $x_4 = x_4$

Lösung zu b:
Dieses unterbestimmte LGS hat unendlich viele Lösungen, die vom Applet in parametrisierter Form angezeigt werden.
$L = \{(x; y; z; t) : x = 1, y = 1 - c, z = 1, t = c; c \in \mathbb{R}\}$

Übung 1 LGS mit einem Computerprogramm lösen
Lösen Sie das Gleichungssystem mit einem Computerprogramm, einem GTR oder einem CAS.

a) $2x + 3y - z = 9$
$3x + y - 2z = 8$
$-x + 2y + 3z = 9$
$2x - y - 2z = 1$

b) $2x + y + z - 3t = 4$
$4x - y + 4z - 6t = 8$
$3x + 2y - z + 2t = 6$

c) $2x + 3y - z = 6$
$x + y + 2z = 12$
$-x + 3y - z = 2$
$x + 2y - 3z = 2$

* Den **Matrix-Calculator** findet man auf: https://matrixcalc.org

Auch lineare Gleichungssysteme mit Parameter (vgl. S. 27 f.) lassen sich mit Hilfe von Computerprogrammen lösen.

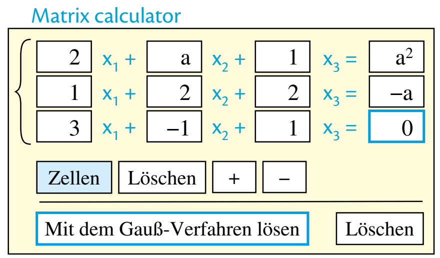
Beispiel: Lineares (3; 3)-Gleichungssystem mit Parameter
Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit ($a \in \mathbb{R}$).

I $2x + ay + z = a^2$
II $x + 2y + 2z = -a$
III $3x - y + z = 0$

Lösung:
Wir verwenden das Applet Matrix-Calculator aus dem vorhergehenden Beispiel.

Dort wählen wir wieder den Menupunkt ***Gleichungssystem*** aus.
Wir stellen dann mit den Eingabefeldern + und – die gewünschte Ordnung des Gleichungssystems ein, hier ein (3; 3)-LGS.
In die rechteckige Eingabemaske geben wir die Koeffizienten unseres Gleichungssystems ein.

Gaußscher Algorithmus:



Dann starten wir die Berechnung durch Anklicken des Menupunktes ***Mit dem Gauß-Verfahren lösen.***

$x_1 = a$
$x_2 = a$
$x_3 = -2 \cdot a$

Die Lösung* lautet $x = a, y = a, z = -2a$.

Übung 2 (3; 3)-LGS mit Parameter
Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit ($a \in \mathbb{R}$). Geben Sie ggf. die Lösung an.

a) I $x + 2y + z = 2$
II $x + y + az = 1 - a^2$
III $2x + y - z = 1$

b) I $x + y + az = a$
II $2x - y = 3a$
III $2x + 2y + 2z = 2$

Übung 3 Unendliche Lösungsmenge
Ermitteln Sie, wie der Parameter a gewählt werden muss, damit das LGS unendlich viele Lösungen hat. Geben Sie diese an.
I $x - 3y + z = 1$
II $-x - y + 3z = -1$
III $-2x + 2y + az = -2$

Übung 4 Parameterbestimmung
Ermitteln Sie, für welchen Wert des Parameters a das LGS eine Lösung x, y, z mit z = 4 hat. Geben Sie diese an.
I $2x - y + z = 5a$
II $x - y - z = 0$
III $ax + 2y + z = a^2$

* Das Applet macht die rechentechnischen Einschränkungen $a - 4 \neq 0$ und $5a + 1 \neq 0$, die aber unnötig sind.

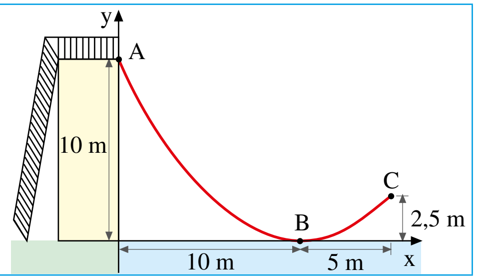
6. Anwendungen

A. Modellierung von Funktionen

Häufig werden Funktionen mit bestimmten Eigenschaften gesucht, z. B. bezüglich der Nullstellen, Extrema oder Wendepunkte. Man spricht hier von ***Steckbriefaufgaben***, im Anwendungszusammenhang auch von ***Modellierungsaufgaben***. Man benötigt stets einen plausiblen Funktionsansatz. Die Koeffizienten im Ansatz können mit linearen Gleichungssystemen bestimmt werden.

Beispiel: Wasserrutsche

Eine neue Wasserrutsche soll nach dem abgebildeten Plan gebaut werden.
Die Profilkurve f der Rutsche soll Parabelform besitzen.
Bestimmen Sie die Parabelgleichung, bezogen auf das eingezeichnete Koordinatensystem.



Lösung:
Der Ansatz lautet $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Aus der Zeichnung können wir laut Bemaßung drei Punkte ablesen:
A (0|10), B (10|0) und C (15|2,5).

Durch Einsetzen der Koordinaten von A, B und C in die Ansatzgleichung ergibt sich ein (3; 3)-Lineares Gleichungssystem.

Wir lösen das lineare Gleichungssystem in der üblichen Weise.

Die Lösungen lauten $a = \frac{1}{10}$, $b = -2$, $c = 10$, so dass sich für die gesuchte Profilkurve die folgende Gleichung ergibt:
$f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 2x + 10$

1. Ansatz
$f(x) = ax^2 + bx + c$

2. Lineares Gleichungssystem

A (0|10):	I:	$c = 10$
B (10|0):	II:	$100a + 10b + c = 0$
C (15|2,5):	III:	$225a + 15b + c = 2,5$
Vereinfacht:	II:	$100a + 10b = -10$
	III:	$225a + 15b = -7,5$

3. Lösung des Gleichungssystems
aus I: $c = 10$
$2,5 \cdot \text{II} - \text{III}$: $7,5b = -15 \Rightarrow b = -2$
in II: $100a - 20 = -10 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{10}x^2 - 2x + 10$

Übung 1 Funktionsgleichung

Der Bremsweg s eines neuen Sportwagenmodells wird vom Hersteller einem Test unterzogen (siehe Messwerttabelle rechts).

v in m/s	10	20	40
s in m	2,5	10	40

Es wird vermutet, dass der Bremsweg s eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit v ist. Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Funktion s (v).

B. Rätselaufgaben

Rätselaufgaben dienen in der Regel zur mathematischen Unterhaltung. Sie können durch intelligentes Probieren gelöst werden, oft aber auch systematisch, z. B. mit Gleichungssystemen.

Beispiel: Viehmarkt

Ein Bauer handelt auf dem Viehmarkt mit Pferden, Kühen und Schafen.
In der ersten Woche verkauft er 2 Pferde und 4 Schafe und kauft 5 Kühe. Er verdient so 1000 €.
In der zweiten Woche verkauft er 1 Pferd, 2 Kühe und 2 Schafe und hat einen Erlös von 5000 €.
In der dritten Woche verkauft er 6 Schafe, kauft aber 2 Pferde und 5 Kühe. Diesmal macht er einen Verlust von 6000 €.
Welchen Handelswert haben ein Pferd, eine Kuh bzw. ein Schaf?

Lösung:
x sei der Wert eines Pferdes, y der Wert einer Kuh und z der Wert eines Schafes.
Wenn er 2 Pferde verkauft, 5 Kühe kauft und 4 Schafe verkauft und er 1000 € verdient, so lautet die zugehörige Gleichung $2x - 5y + 4z = 1000$. Analog ergeben sich zwei weitere Gleichungen.

Das lineare Gleichungssystem lösen wir nun mit dem Gaußschen Algorithmus manuell oder mit dem Rechner.
Wir erhalten im Ergebnis als Handelswert für ein Pferd 2000 €, für eine Kuh 1000 € und schließlich für ein Schaf 500 €.

1. Festlegung der Variablen
x: Handelswert eines Pferdes
y: Handelswert einer Kuh
z: Handelswert eines Schafes

2. Lineares Gleichungssystem
1. Woche: $2x - 5y + 4z = 1000$
2. Woche: $x + 2y + 2z = 5000$
3. Woche: $-2x - 5y + 6z = -6000$

3. Lösung des Gleichungssystems
$x = 2000,\ y = 1000,\ z = 500$

Übung 2 Altersrätsel

Das Alter von Max plus das doppelte Alter von Moritz ergeben 50.
Das Alter von Moritz plus das doppelte Alter von Max ergeben 49.
Wer ist der Ältere? Wie alt sind die beiden?

Übung 3 Sparen

David, Tina und Georg haben zusammen 160 € gespart. David hat am meisten. Er besitzt 24 € mehr als Georg. Tina hat am wenigsten. Sie besitzt 14 € weniger als Georg. Wie groß sind die Ersparnisse von Tina?

Übung 4 Bewegung/Geschwindigkeit

Anja wohnt in Friedberg und Laura in Bad Nauheim. Sie wollen sich am Nachmittag treffen. Der Radweg zwischen ihren Wohnungen ist 6 km lang. Anja fährt mit einer Geschwindigkeit von 10 km/h. Laura schafft sogar 15 km/h. Beide fahren um 15 Uhr los. Wann und wo treffen sie sich?

Hinweis: Man kann die Formel für die Geschwindigkeit v verwenden:
$v = \frac{s}{t}$ (s: Weg; t: Zeit)

Übungen

5. Kinokarten

Ein Kino verkauft Karten zum vollen Preis zu 9 € sowie ermäßigte Karten an Rentner zu 6 € und an Studenten zu 5 €. In einer Vorstellung werden 400 Karten zu 3300 € verkauft. Die Anzahl der Karten für Studenten war dreimal so groß wie die Anzahl der Rentnerkarten.
Wie viele Karten wurden ohne Ermäßigung verkauft?

6. Geldanlagen

Nikolai hat 30 000 € investiert. Für einen Teil des Geldes hat er in Schatzbriefe gekauft, die 3 % Jahreszinsen abwerfen. Einen weiteren Teil hat er in Immobilienfonds investiert, die 5 % Rendite pro Jahr bringen sollen. Den Rest des Geldes hat er in Aktien angelegt, für die sein Anlageberater mit einer Wertsteigerung von 8 % rechnet. In die Aktien hat er doppelt so viel investiert wie in die Schatzbriefe. Der Anlageberater hat ausgerechnet, dass er pro Jahr voraussichtlich 1820 € Profit erzielen wird. Wie viel Geld hat Nikolai in die Aktien investiert?

7. Schulweg

Sebastian macht sich morgens auf den Weg zur Schule. Er geht mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h. Sein Freund Oskar wohnt im gleichen Haus. Er fährt 15 Minuten später mit dem Fahrrad los. Damit schafft er 30 km/h. Sie kommen gleichzeitig um 7:55 in der Schule an. Wann ist Sebastian losgegangen? Wie lang ist der Schulweg?

8. Dreistellige Zahl

Die Hunderterziffer einer dreistelligen Zahl ist doppelt so groß wie ihre Zehnerziffer. Liest man die dreistellige Zahl von hinten nach vorne, so ist die neue Zahl um 99 größer als die Ausgangszahl. Die Summe der Ziffern der Zahl ist 11. Wie heißt die Zahl?

9. Sparschwein

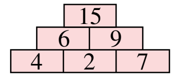
Hans hat in seinem Sparschwein 102 Münzen. Es sind nur 1 ct-, 2 ct-, 5 ct-, und 10 ct-Münzen. Die Anzahl der 2 ct-Münzen ist genauso groß wie die Anzahl der restlichen Münzen. Von den 10 ct-Münzen hat Hans eine mehr als von den 1ct-Münzen. Der Wert aller Münzen beträgt 3,82 €. Wie viele 5 ct-Münzen besitzt Hans?

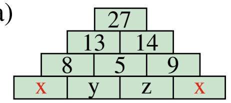
10. Rätselhaft

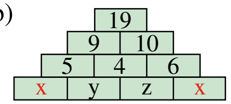
Emma kauft für ihre Familie im Obstgeschäft ein. Für ihre Mutter kauft sie 1 Pfund Bananen und 2 Pfund Orangen für 4 €. Für ihre Tante kauft sie 1 Pfund Bananen und 4 Pfund Kirschen für 6 €. Für ihre Oma kauft sie 1 Pfund Bananen, 1 Pfund Kirschen und 3 Pfund Trauben für 3 €. Am nächsten Tag kauft Emma von jeder der 4 Sorten genau ein Pfund ein. Was muss sie für diesen Einkauf bezahlen?
Hinweis: Für die Einzelpreise der vier Produkte gibt es mehrere Lösungen. Es geht aber um den *Gesamtpreis* des Einkaufs von Emma.

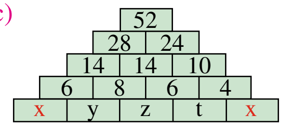
11. Zahlenmauern

Zahlenmauern kennt man aus der Grundschule. Sie werden normalerweise von unten nach oben ausgefüllt, um die Addition zu üben.
Bei unserer Zahlenmauer dagegen ist die *untere Zeile* gesucht. Welche Möglichkeiten gibt es, sie so auszufüllen, dass links und rechts die gleiche Zahl x steht?
In der Zahlenmauer sind nur natürliche Zahlen zugelassen.



a)


b)


c)


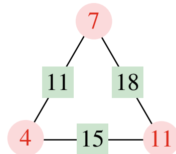
12. Funktionsgleichung

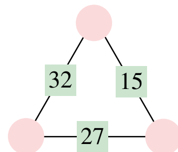
Die Funktion $h(t) = a t^2 + b t + c$ beschreibt die Höhe eines Wurfes. (t in s, h in m).
Ein Volleyball wird aus einer Höhe von 1 m zurückgeschlagen. Nach 0,5 s ist er in 2,75 m Höhe und nach 1 s in nur noch 2 m Höhe.

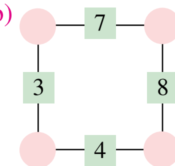
a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c.
b) Wie lange dauert es, bis der Ball den Boden berührt, sofern er vom Gegner nicht abgefangen wird?

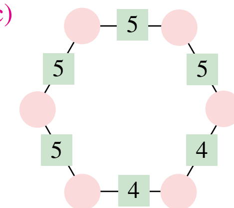
13. Arithmagon

Ein Arithmagon ist ein Polygon (Dreieck, Viereck, …), mit Kreisen in den Ecken und Quadraten auf den Strecken. In den Kreisen und Quadraten stehen natürliche Zahlen. Jede „Quadratzahl“ ist die Summe der beiden anliegenden „Kreiszahlen“, wie im Beispiel rechts.
Bei den folgenden Arithmagons sind die passenden Kreiszahlen gesucht. Bestimmen Sie diese.
Hinweis: Bei b) und c) gibt es mehrere Lösungen.



a)


b)


c)


14. Erlebnispark

Emma, Lisa und Karl verbringen einen Tag im Erlebnispark. Die Tabelle zeigt, wie oft sie die drei größten Attraktionen in Anspruch genommem haben und was sie gezahlt haben.

	Achterbahn	Wildwasser	Schwebetunnel	Preis
Emma	2	4	2	14 €
Lisa	3	3	2	15 €
Karl	5	1	3	20 €

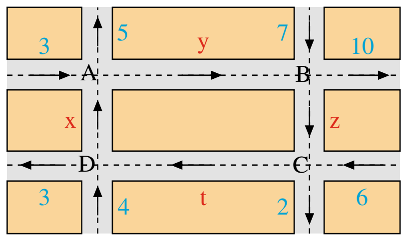
Was kostet eine Fahrt mit der Achterbahn?

C. Ströme in Netzwerken

Die Auslastung von Transport- und Straßennetzen kann mit mathematischen Hilfsmitteln berechnet werden. In einfachen Fällen können lineare Gleichungssysteme hierzu verwendet werden.

Beispiel: Straßennetz
Der abgebildete Kartenauschnitt zeigt ein System von Einbahnstraßen. Die Zahlenangaben geben die Durchflussmengen in 1000 KFZ pro Stunde an, die durch Verkehrszählungen in der Hauptverkehrszeit ermittelt wurden. Der zentrale Straßenring soll erneuert werden. Die notwendigen Durchflusskapazitäten x, y, z und t sollen ermittelt werden.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für x, y, z und t auf. Orientieren Sie sich dazu an der Kreuzungsregel. Lösen Sie das Gleichungssystem anschließend.
b) Wie groß sind die Kapazitäten x, y, z und t mindestens zu wählen, damit kein Stau entsteht?
c) Kann eines der Straßenstücke BC bzw. AB gesperrt werden, ohne dass Stau auftritt?



Lösung zu a:
Für jeder der vier Kreuzungen gilt die Kreuzungsregel: Pro Zeiteinheit müssen genauso viele Fahrzeuge einfahren wie ausfahren.

In Kreuzung A fahren stündlich x + 3 Fahrzeuge ein (in Tausend) und es fahren y + 5 Fahrzeuge heraus. Nach der Kreuzungsregel gilt also die folgende Gleichung:

$$x + 3 = y + 5$$

Diese Bilanz führen wir nun für jede der vier Kreuzungen durch. Dann erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Variablen x, y, z und t, welches rechts aufgeführt ist.
Dieses überführen wir zunächst in die Normalform (Variablen links, Zahlen rechts).

Wir können das LGS manuell lösen, indem wir den Gaußschen Algorithmus anwenden. Da I, II und III schon zur Stufenform passen, müssen wir nur noch IV verändern.

Dies wird mit folgenden Schritten erreicht:
IV $\to$ I + IV führt auf IV′: $-y + t = 1$
IV′ $\to$ II + IV′ führt auf IV″: $-z + t = 4$
IV″ $\to$ III + IV″ führt auf IV‴: $0 = 0$

Die Kreuzungsregel:
Notwendig für die Vermeidung eines Staues an einer Kreuzung ist Folgendes:
Die Summe der pro Zeiteinheit in eine Kreuzung einfahrenden Fahrzeuge muss gleich der Summe der die Kreuzung verlassenden Fahrzeuge sein.

1. Lineares Gleichungssystem:
Kreuzung A: $x + 3 = y + 5$
Kreuzung B: $y + 7 = z + 10$
Kreuzung C: $z + 6 = t + 2$
Kreuzung D: $t + 4 = x + 3$

2. Normalform:
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x - y \phantom{{}-z-t} = 2 \\ \text{II:} & \phantom{x-{}} y - z \phantom{{}-t} = 3 \\ \text{III:} & \phantom{x-y-{}} z - t = -4 \\ \text{IV:} & -x \phantom{{}-y-z} + t = -1 \end{array}$$

3. Stufenform:
$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x - y = 2 \\ \text{II:} & y - z = 3 \\ \text{III:} & z - t = -4 \\ \text{IV:} & 0 = 0 \end{array}$$

Die Nullzeile bedeutet, dass das LGS unendlich viele Lösungen hat.
Wir setzen also t = c, wobei c ein frei gewählter Parameter ist.
Dann folgen durch Rückeinsetzungen die Werte für die restlichen Variablen:
$t = c$, $z = c - 4$, $y = c - 1$ und $x = c + 1$

Lösung zu b:
Nun sind wir aber noch nicht fertig, denn c kann nicht völlig frei gewählt werden. Es gibt Einschränkungen.
Alle vier Variablen x, y, z und t müssen größer oder gleich null sein, weil negative Werte bedeuten würden, dass der Verkehr gegen die Richtung der Einbahnstraßen fließen würde, was natürlich verboten ist.
Diese Einschränkungen führen, wie rechts dargestellt, insgesamt dazu, dass $c \geq 4$ gelten muss.
Für c = 4 ergeben sich die Minimalkapazitäten, die mindestens verlangt werden müssen, damit nicht zwangsläufig ein Stau auftritt. Sie sind $x = 5$, $y = 3$, $z = 0$ und $t = 4$.
Rechts ist die Minimallösung dargestellt.

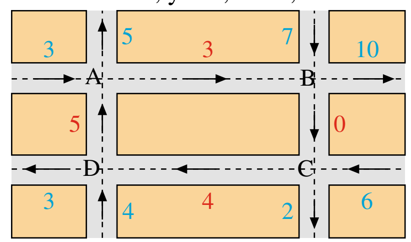
Lösung zu c:
Interpretation: Das Straßenstück BC könnte also notfalls auch einmal gesperrt werden, ohne dass es zum Stau kommen muss, da z = 0 erlaubt ist.
Das Straßenstück AB kann aber ohne weitere Maßnahmen nicht gesperrt werden, da es immer mindestens die Kapazität y = 3 aufweisen muss.

4. Lösung des LGS:
Das LGS hat unendlich viele Lösungen

$t = c$ (c frei gewählter Parameter)
$z = t - 4 = c - 4$
$y = z + 3 = c - 1$
$x = y + 2 = c + 1$

5. Einschränkungen:
Wegen $x \geq 0$ folgt $c + 1 \geq 0$, also $c \geq -1$
Wegen $y \geq 0$ folgt $c - 1 \geq 0$, also $c \geq 1$
Wegen $z \geq 0$ folgt $c - 4 \geq 0$, also $c \geq 4$
Wegen $t \geq 0$ folgt $c \geq 0$.
Insgesamt: $c \geq 4$

6. Minimallösung:
$c = 4 \Rightarrow x = 5,\ y = 3,\ z = 0,\ t = 4$

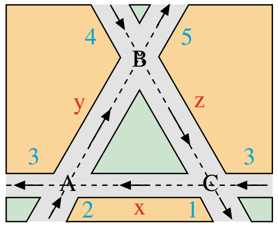


7. Interpretation
BC kann wegen z = 0 ohne Staugefahr gesperrt werden.
AB kann wegen y = 3 nicht gesperrt werden. Bei einer Sperrung bestünde Staugefahr.

Übung 15 Fortsetzung des Beispiels
Die folgenden Aufgabenteile beziehen sich auf das Beispiel oben.
a) Wegen einer notwendigen Spurreparatur auf dem Straßenstück CD wird dessen Kapazität auf 2500 Autos pro Stunde verringert. Ersatzweise wird eine Behelfsfahrbahn von C nach A gelegt. Welche Kapazität muss diese Fahrbahn mindestens besitzen, damit kein Stau auftritt?
b) Die Kapazität der bei B aus dem Ring herausführenden Straße wird wegen eines Krankenhauses aus Lärmschutzgründen auf 5000 Fahrzeuge pro Stunde abgesenkt. Gleichzeitig werden die Kapazitäten der bei A und C herausführenden Straßen auf 7500 bzw. auf 4500 Fahrzeuge pro Stunde erhöht. Berechnen Sie nun die neuen Minimalkapazitäten der Ringstraßen.

Übung 16 Dreiecksring

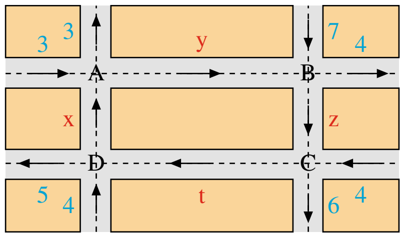
Drei Einbahnstraßen umranden einen dreieckigen Park. Die Kapazitäten der Zu- und Abflussstraßen sind in 1000 Autos pro Stunde angegeben. Nun sollen Kapazitäten x, y und z für die drei neu zu gestaltenden Ringstraßen des Parks festgelegt werden.



a) Stellen Sie nach der Kreuzungsregel ein lineares Gleichungssystem für die Kapazitäten x, y und z der drei Ringstraßen auf.
b) Bestimmen Sie die allgemeine mathematische Lösung des lineares Gleichungssystems.
c) Welche Einschränkungen ergeben sich für die Lösung aus b), wenn man berücksichtigt, dass keine der Variablen x, y und z negativ werden darf?
d) Wie lauten die Minimalkapazitäten für die drei Ringstraßen, die den Park begrenzen?
e) Keine einzige der drei Ringstraßen soll eine geringere Kapazität als 500 Autos pro Stunde haben. Wie lautet dann eine Lösung mit minimalen Kapazitäten?

Übung 17 Straßensperrung / Maximalkapazität

Im abgebildeteten Einbahnstraßensystem sind die Verkehrsdichten auf den Zu- und Abflussstraßen bekannt (Angaben in 1000 Fahrzeugen pro Stunde).
Die möglichen Verkehrsdichten x, y, z und t auf den inneren Straßenstücken sollen untersucht werden.

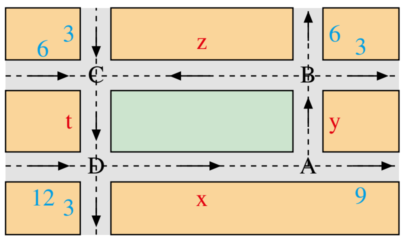


a) Stellen Sie nach der Kreuzungsregel ein lineares Gleichungssystem für die Kapazitäten x, y, z und t der vier inneren Straßenstücke auf, welche die Kreuzungen A bis D verbinden.
b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems.
c) Welche Einschränkungen ergeben sich für die Lösung aus b), wenn man berücksichtigt, dass keine der Variablen x, y, z und t negativ werden darf?
d) Kann das Straßenstück CD bei Bedarf gesperrt werden, ohne dass es zum Stau kommt?
e) Wie groß sind die Minimalkapazitäten der vier Ringstraßen?

Übung 18 Mindestkapazitäten / Richtungsumkehr

Im einem Einbahnstraßennetz sind die Verkehrsflüsse der Zu- und Abfahrten angegeben.

a) Wie groß sind die noch festzulegenden Kapazitäten x, y, z und t der inneren Ringstraßen mindestens zu wählen, damit es nicht zwangsläufig zum Stau kommt?
b) Das Straßenverkehrsamt erwägt, die Richtung des Straßenstücks BC umzukehren. Welche Auswirkungen hätte diese Maßnahme auf die zu wählenden Kapazitäten der Ringstraßen?



D. Mischungsprobleme

In technischen und wirtschaftlichen Prozessen werden manchmal aus mehreren vorhandenen Rohstoffmixturen durch Mischung neue Mixturen zusammengestellt. Dabei geht es oft um Kosteneinsparungen. Solche Mischungsprobleme können in der Regel mit Hilfe linearer Gleichungssysteme gelöst werden. Die Hauptschwierigkeit besteht im Aufstellen der Gleichungssysteme.

Beispiel: Eine neue Kaffeesorte

Ein Kaffeegroßhändler hat zwei Kaffeesorten Brazil (B) zum Preis von 6 €/Pfund und Kuba (K) zu 3 €/Pfund im Sortiment. Ein Kunde bestellt 120 Pfund Kaffee, der aber nur 5 €/Pfund kosten darf.
Kann der Händler durch Mischung seiner beiden Sorten den Auftrag erfüllen?

Lösung:
x sei die für den Auftrag benötigte Menge von Sorte B, y sei die benötigte Menge von Sorte K, gewogen in Pfund.
Da aus den beiden Sorten B und K insgesamt 120 Pfund Kaffee hergestellt werden sollen, muss gelten: I: $x + y = 120$.
x Pfund von Sorte B kosten $6x$ Euro.
y Pfund von Sorte K kosten $3y$ Euro.
Also betragen die Gesamtkosten der neuen Mischung $6x + 3y$. Da ein Pfund der neuen Mischung 5 € kosten soll und 120 Pfund geordert werden, sind dies 600 €.
Also gilt die Gleichung II: $6x + 3y = 600$

Wir erhalten ein (2; 2)-LGS, das wir manuell mit dem Gaußschen Algorithmus oder mit dem Taschenrechner lösen.

Das Resultat lautet $x = 80$, $y = 40$.
Der Großhändler kann also 80 Pfund Brazil und 40 Pfund Kuba zu 120 Pfund einer neuen Sorte Karibik mischen, die 5 €/Pfund kostet.

Festlegung der Variablen:
x = Menge von Sorte B
y = Menge von Sorte K

Aufstellung eines Gleichungssystems:
Mengenbilanz: I $x + y = 120$
Kostenbilanz: II $6x + 3y = 600$

Lösung des LGS mittels Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 120 \\ \text{II} & 6x + 3y = 600 \rightarrow \text{II} - 6 \cdot \text{I} \end{array}$$

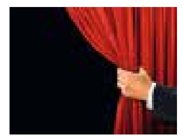
$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 120 \\ \text{II} & -3y = -120 \end{array}$$

aus II: $\Rightarrow y = 40$
in I: $x + 40 = 120 \Rightarrow x = 80$

Resultat:
$x = 80$, $y = 40$

Übung 19 Theater

Ein Theater hat 20 Reihen mit je 18 Plätzen. Die Karten für die ersten 8 Reihen kosten 48 €, Karten ab der 9. Reihe kosten 32 €. Für eine Vorstellung werden 260 Karten verkauft und damit 8800 € Einnahmen erzielt. Berechnen Sie, wie viele Besucher der Vorstellung eine Karte für die ersten 8 Reihen gekauft haben.



Beispiel: Parfümherstellung

In einer Parfümerie kann man aus drei verschiedenen Duftwässern A, B und C sein eigenes Parfüm herstellen. Die drei Duftwässer enthalten die Duftstoffe L (Lavendel) und R (Rose) in verschiedenen Konzentrationen.

Berechnen Sie, welche Menge a, b bzw. c von jeder Sorte Duftwasser benötigt wird, um 50 ml eines Parfüms herzustellen, dass 4 ml des Duftstoffes Lavendel und 6 ml des Duftstoffes Rose enthält.

	A	B	C
L	4 %	10 %	15 %
R	8 %	20 %	10 %

Lösung:
a sei die Menge des Duftwassers A, die für die Mischung benötigt wird. b und c seien entsprechend die Mengen der Duftwässer B und C, die benötigt werden.
Da insgesamt 50 mg Parfüm hergestellt werden sollen, muss gelten: I: $a + b + c = 50$.

Da 4 ml des Duftstoffes Lavendel im Endprodukt sein sollen, müssen 4 % von A, 10 % von B und 15 % von C zusammen 4 ml ergeben. Dies führt auf folgende Gleichung:
II: $0{,}04a + 0{,}10b + 0{,}15c = 4$

Für den Duftstoff Rose müssen 8 % von A, 20 % von B und 10 % von C 6 ml ergeben.
III: $0{,}08a + 0{,}20b + 0{,}10c = 6$

Wir erhalten ein (3; 3)-LGS, das wir manuell mit dem Gaußschen Algorithmus oder alternativ mit dem Taschenrechner lösen.

Die Lösung lautet a = 25, b = 15, c = 10.
Man wird also 25 ml von Duftwasser A, 10 ml von Duftwasser B und 10 ml von Duftwasser C mischen, um 50 ml des gewünschten Parfüms zu erhalten.

Aufstellung eines Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & a + b + c = 50 \\ \text{II} & 0{,}04a + 0{,}10b + 0{,}15c = 4 \\ \text{III} & 0{,}08a + 0{,}20b + 0{,}10c = 6 \end{array}$$

Lösung des LGS mittels Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & a + b + c = 50 & \\ \text{II} & 4a + 10b + 15c = 400 & \rightarrow \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} & 8a + 20b + 10c = 600 & \rightarrow \text{III} - 8 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I}' & a + b + c = 50 & \\ \text{II}' & 6b + 11c = 200 & \\ \text{III}' & 12b + 2c = 200 & \rightarrow \text{III}' - 2 \cdot \text{II}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I}'' & a + b + c = 50 \\ \text{II}'' & 6b + 11c = 200 \\ \text{III}'' & -20c = -200 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{aus III}'': & & \Rightarrow c = 10 \\ \text{in II}'': & 6b + 110 = 200 & \Rightarrow b = 15 \\ \text{in I}': & a + 15 + 10 = 50 & \Rightarrow a = 25 \end{array}$$

Lösung des LGS:
a = 25, b = 15, c = 10

Übung 20 Parfüm herstellen

Ermitteln Sie, welche Mengen der Duftwässer A, B und C aus obigem Beispiel genommen werden müssen, um 100 ml eines Parfüms herzustellen, das 11 ml des Duftstoffes Lavendel und 12 ml des Duftstoffes Rose enthält.

Im folgenden Mischungsproblem sind unendlich viele Lösungen möglich. Darüber hinaus müssen nach dem Lösen des Gleichungssystems zusätzliche Überlegungen erfolgen, welche der theoretisch möglichen Lösungen wirklich praktisch umsetzbar sind.

Beispiel: Linolsäurekonzentration

Für einen Versuch werden 100 ml 60-prozentige Linolsäure benötigt. Der Laborant hat aber nur Linolsäure in Konzentrationen von 30 %, 50 % und 80 % vorrätig.
Welche Möglichkeiten hat der Laborant, die 100 ml Linolsäure in der gewünschten 60 %-Konzentration herzustellen.

Lösung:
Wir benennen zunächst die Variablen.
x: Menge der 30 %igen Lösung
y: Menge der 50 %igen Lösung
z: Menge der 80 %igen Lösung.

Da 100 ml benötigt werden, muss gelten:
$$x + y + z = 100$$

Weiter müssen 30 % von x, 50 % von y und 80 % von z zusammen 60 ml ergeben, also:
$$0{,}3x + 0{,}5y + 0{,}8z = 60$$

So entsteht ein (2; 3)-LGS, das wir manuell oder mit dem Rechner lösen. Es hat unendlich viele Lösungen folgender Form:
$x = -50 + 1{,}5c,\ y = 150 - 2{,}5c,\ z = c\ (c \in \mathbb{R})$

Da die Lösungen x, y und z nicht negativ sein dürfen, da es sich um Mengen handelt, erhalten wir folgende Einschränkung:
$$\frac{100}{3} \le c \le 60$$
Mögliche Lösungen wären also z. B.:
Für c = 40: x = 10, y = 50, z = 40
Für c = 60: x = 40, y = 0, z = 60

1. Aufstellen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y + z = 100 \\ \text{II:} & 0{,}3x + 0{,}5y + 0{,}8z = 60 \end{array}$$

2. Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & x + y + z = 100 & \\ \text{II:} & 3x + 5y + 8z = 600 & \rightarrow \text{II} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y + z = 100 \\ \text{II:} & 2y + 5z = 300 \end{array}$$

Das System ist unterbestimmt.
Es hat unendlich viele Lösungen.
Eine Variable kann frei gewählt werden.

$z = c \quad (c \in \mathbb{R}, \text{ frei gewählt})$
in II: $2y + 5c = 300 \quad \Rightarrow y = 150 - 2{,}5c$
in I: $x + 150 - 2{,}5c + c = 100 \Rightarrow x = -50 + 1{,}5c$

3. Einschränkungen der Lösung:

$x \ge 0 \Rightarrow -50 + 1{,}5c \ge 0 \Rightarrow c \ge \frac{100}{3}$
$y \ge 0 \Rightarrow 150 - 2{,}5c \ge 0 \Rightarrow c \le 60$
$z \ge 0 \Rightarrow c \ge 0$
$\Rightarrow \frac{100}{3} \le c \le 60$

Übung 21 Geldanlage

Ein Bankkunde möchte 20 000 € anlegen. Er möchte im Anlagejahr 1000 € Profit erzielen.
Die Bank bietet Aktien an, die 8 % Rendite abwerfen, Fonds mit 6 % und Schatzbriefe mit 2 %.

a) Wie kann er seinen Anlagebetrag auf diese drei Papiere aufteilen?
b) Wie sollte er den Anlagebetrag aufteilen, wenn er ein hohes Risiko scheut und möglichst viele Schatzbriefe kaufen will?

Übungen

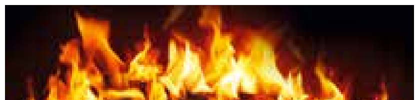
22. Milch
Eine Molkerei verfügt über drei Milchsorten A, B und C mit 3 %, 5 % und 6 % Fettanteil. Durch Mischung dieser Sorten sollen 10 Hektoliter Milch mit 4 % Fettanteil erzeugt werden.
Die Menge der für die Mischung verwendeten Milch mit 5 % Fettanteil soll genauso groß sein wie die Menge der Milch mit 6 % Fettanteil. Welche Mengen müssen gemischt werden?

23. Rotwein
Ein Winzer erntet 30 Hektoliter Merlot und 29 Hektoliter Cabernet Sauvignon. Er mischt daraus einen Rotwein guter Qualität, der 25 % Merlot und 75 % Cabernet Sauvignon enthält. Sein Rotwein mittlerer Qualität enthält 75 % Merlot und 25 % Cabernet Sauvignon. Berechnen Sie, welche Mengen an Rotwein guter bzw. mittlerer Qualität der Winzer herstellt.

24. Geldanlage
Sebastian hat 20 000 € geerbt, die er anlegen will. Davon möchte er 45 % in Aktien und 40 % in Rentenpapieren anlegen. Seine Bank bietet ihm drei Fonds mit unterschiedlichen Anlagestrategien an. Berechnen Sie, welche Beträge er in die drei Fonds investieren sollte, um sein Anlageziel zu erreichen.

Fonds A	B	C
Aktien 30 %	50 %	60 %
Renten 50 %	40 %	10 %

25. Kaminholz
Ein Händler bietet drei Sorten Kaminholz an, die unterschiedliche Anteile an Eichen- bzw. Birkenholz enthalten. Ein Kunde bestellt 1000 kg Kaminholz, worunter 400 kg Eichenholz und 350 kg Birkenholz sein sollen. Welche Mengen seiner drei Sorten muss der Händler zusammenstellen?



Sorte A	B	C
Eiche 20 %	30 %	70 %
Birke 60 %	40 %	10 %

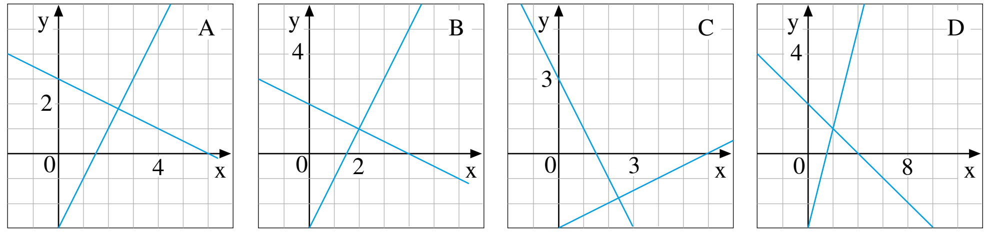
26. Müsli
Ein Hobbyläufer möchte ein neues Frühstücksmüsli bestellen. Der Händler bietet drei verschiedene Sorten an, welche 10 %, 50 % bzw. 60 % Cornflakes enthalten. Man kann diese Sorten auf Bestellung frei zu 200 g-Packungen mischen lassen. Welche Möglichkeiten hat der Hobbyläufer, 200 g-Packungen zu bestellen, die 40 % Cornflakes enthalten?

Übungen

Die folgenden Übungen sollen ohne Hilfsmittel gelöst werden.

1. Graphik
Die einzelnen Gleichungen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen können graphisch als Geraden im zweidimensionalen Koordinatensystem gedeutet werden. Entscheiden Sie, welche der vier Zeichnungen das gegebene lineare Gleichungssystem graphisch darstellen. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

I: $x + 2y = 4$
II: $y + 3 = 2x$



2. Schnelle Lösung
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem auf einem möglichst einfachen und schnellen Weg. Notieren Sie Ihre Lösungsschritte sorgfältig.

I: $x + y = 3 + z$
II: $2y + 1 = 5$
III: $y + z = 5$

3. Unlösbar
Gegeben sind zwei lineare Gleichungssysteme. Genau eines davon ist unlösbar. Entscheiden Sie, welches System unlösbar ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung stichhaltig.

System A
I: $2x + 2y + z = 6$
II: $-2y + x = 1$
III: $z + 3x = 6$

System B
I: $2x + 2y + z = 10$
II: $-2y + x = 0$
III: $z + 3x = 10$

4. Gauß-Algorithmus
a) Formen Sie das LGS so um, dass es Dreiecksform besitzt.
$x - 4y + 3z = 3$
$2x - 6y + 4z = 4$
$3x - 10y + 8z = 9$

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.
$3x + z - 10 = -2y$
$4y - 2 = 2z$
$3z - 12 = -3z$

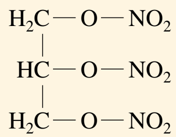
5. Unlösbar
Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem.
Ermitteln Sie denjenigen Wert des Parameters a, für den das Gleichungssystem keine Lösung hat.

I: $2x - y = 2$
II: $4x - ay = 6$

Chemische Reaktionsgleichungen

Dem italienischen Chemiker SOBRERO gelang im Jahre 1846 die Herstellung der hochexplosiven Flüssigkeit *Nitroglycerin* ($C_3H_5N_3O_9$). Schon durch kleine mechanische Erschütterungen wurde die Explosion ausgelöst, was die praktische Anwendbarkeit als Sprengstoff stark einschränkte.

Alfred NOBEL (1833–1896) hatte die Idee, dieses Sprengöl in porösem Kieselgut aufzusaugen, sodass ein erschütterungsfester, transportabler, kontrolliert zündbarer Sprengstoff entstand, der den Namen *Dynamit* erhielt.



Nitroglycerin

Chemische Reaktionen lassen sich durch ***Reaktionsgleichungen*** beschreiben. Dabei muss berücksichtigt werden, dass bei allen chemischen Reaktionen die Gesamtmasse aller Stoffe unverändert bleibt. Vor und nach der Reaktion müssen also gleich viele Atome desselben Elements vorhanden sein. Beim Aufstellen chemischer Reaktionsgleichungen müssen die Koeffizienten vor den an der Reaktion beteiligten Stoffen (Molekülen) bestimmt werden. Wir zeigen dies im folgenden Beispiel.

Bestimmung einer chemischen Reaktionsgleichung

Bei der Explosion von *Nitroglycerin* ($C_3H_5N_3O_9$) entstehen unter Hitzeentwicklung die Gase Kohlendioxid (CO_2), Wasserdampf (H_2O), Stickstoff (N_2) und Sauerstoff (O_2). Bestimmen Sie die chemische Reaktionsgleichung für den Explosionsvorgang.

Lösung:
Wir verwenden den nebenstehenden Ansatz für die Reaktionsgleichung. Die Koeffizienten $x_1, \ldots, x_5$ geben die Anzahl der Moleküle an. Man verwendet in der chemischen Reaktionsgleichung möglichst kleine natürliche Zahlen $x_1, \ldots, x_5$, für die die chemische Reaktion möglich ist.
Da vor und nach der Reaktion von jedem Element gleich viele Atome vorhanden sein müssen, erhalten wir für jedes Element eine Gleichung.

Ansatz:

$$x_1 \cdot C_3H_5N_3O_9 \rightarrow$$
$$x_2 \cdot CO_2 + x_3 \cdot H_2O + x_4 \cdot N_2 + x_5 \cdot O_2$$

Für C: $3x_1 = x_2$

Für H: $5x_1 = 2x_3$

Für N: $3x_1 = 2x_4$

Für O: $9x_1 = 2x_2 + x_3 + 2x_5$

Somit ergibt sich ein LGS aus 4 Gleichungen mit 5 Variablen, das wir zunächst in Normalform umstellen und dann mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus auf Stufenform bringen.

$$\begin{array}{llllllll}
\text{I} & 3x_1 & - x_2 & & & & = 0 \\
\text{II} & 5x_1 & & - 2x_3 & & & = 0 \\
\text{III} & 3x_1 & & & - 2x_4 & & = 0 \\
\text{IV} & 9x_1 & - 2x_2 & - x_3 & & - 2x_5 & = 0 \\
\hline
\text{I} & 3x_1 & - x_2 & & & & = 0 \\
\text{II} & & 5x_2 & - 6x_3 & & & = 0 \\
\text{III} & & & - 6x_3 & + 10x_4 & & = 0 \\
\text{IV} & & & & - 2x_4 & + 12x_5 & = 0
\end{array}$$

Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen, eine Variable ist frei wählbar.

Wir wählen $x_5 = c \in \mathbb{R}$.
Nun bestimmen wir durch Rückeinsetzung die Lösungsmenge.

$$L = \{(4c;\ 12c;\ 10c;\ 6c;\ c);\ c \in \mathbb{R}\}$$

Für die chemische Reaktionsgleichung ist nun die kleinste positive Zahl c gesucht, für die sich eine Lösung ergibt, die nur aus natürlichen Zahlen besteht. Diese erhalten wir in diesem Fall für c = 1.

Für c = 1: (4; 12; 10; 6; 1)

Reaktionsgleichung:
$$4\,C_3H_5N_3O_9 \rightarrow 12\,CO_2 + 10\,H_2O + 6\,N_2 + O_2$$

Übungen

Übung 1
Ermitteln Sie für die folgenden chemischen Reaktionen die Koeffizienten.

a) $x_1 CuO + x_2 C \rightarrow x_3 Cu + x_4 CO_2$ (Gewinnung von Kupfer aus Kupferoxid)

b) $x_1 FeS_2 + x_2 O_2 \rightarrow x_3 SO_2 + x_4 Fe_2O_3$ (Entstehung von Schwefeldioxid aus Pyrit)

c) $x_1 P_4O_{10} + x_2 H_2O \rightarrow x_3 H_3PO_4$ (Entstehung von Phosphorsäure)

d) $x_1 C_6H_{12}O_6 \rightarrow x_2 C_2H_5OH + x_3 CO_2$ (alkoholische Gärung)

e) $x_1 KMnO_4 + x_2 HCl \rightarrow x_3 MnCl_2 + x_4 Cl_2 + x_5 H_2O + x_6 KCl$ (Herstellung von Chlorgas)

Übung 2
Die Bildung von *Tropfsteinhöhlen* lässt sich im Wesentlichen auf folgende chemische Reaktionen zurückführen:
Wasser (H_2O) und Kohlendioxid (CO_2) haben im Verlaufe von Jahrtausenden den Kalkstein ($CaCO_3$ Calciumcarbonat) gelöst. Bei der chemischen Reaktion entstehen zunächst Ca- und HCO_3-Ionen, die sich dann zu wasserlöslichem Calciumhydrogencarbonat ($Ca(HCO_3)_2$) verbinden. Die Rückreaktion (Entzug von CO_2) führt wieder zu unlöslichem $CaCO_3$ und damit zur Tropfsteinbildung.
Bestimmen Sie die Reaktionsgleichung für die Anfangsreaktion.

Überblick

Darstellung eines LGS: Ein (m; n)-LGS besteht aus m linearen Gleichungen mit n Variablen. In der Normalform stehen links die variablen Terme und rechts die konstanten Terme.

Normalform:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I:} & x + 2y + z &=& 8 \\ \text{II:} & 2x + y - 2z &=& -2 \\ \text{III:} & 3x - 2y + 3z &=& 8 \end{array}$$

Lösungsmenge eines LGS: Die Lösungsmenge eines (m; n)-LGS wird mit Hilfe eines n-Tupels dargestellt: $L = \{(x_1; x_2; \ldots, x_n)\}$. Beispiel: $L = \{(1; 2; 3)\}$

Äquivalenzumformungen eines LGS: Umformungen eines LGS, welche die Lösungsmenge nicht ändern, werden als **Äquivalenzumformungen** bezeichnet. Dies sind:
(1) Vertauschung von zwei Gleichungen.
(2) Multiplikation einer Gleichung mit einer reellen Zahl $k \neq 0$.
(3) Addition einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Anzahl der Lösungen eines LGS: Es gibt drei Lösbarkeitsfälle:
1. Das LGS hat **keine** Lösung. Es ist unlösbar.
2. Das LGS hat **genau** eine Lösung. Es ist eindeutig lösbar.
3. Das LGS hat **unendlich viele** Lösungen.

Der Gaußsche Algorithmus: Man bringt das LGS mit Äquivalenzumformungen auf *Dreiecksform* oder in eine *Reihenstufenform*. Dann löst man es durch eine Rückwärtseinsetzung.
Fall 1: Die Dreiecksform enthält *mindestens eine* Widerspruchszeile. Dann ist das LGS **unlösbar**.
Fall 2: Die Dreiecksform enthält *keine Widerspruchszeile*. Die Anzahl der Variablen ist gleich der Anzahl der nichttrivialen Zeilen, die keine Allgemeingültigkeit darstellen. Dann ist das LGS **eindeutig lösbar**.
Fall 3: Die Dreiecksform enthält *keine Widerspruchszeile*. Die Anzahl der Variablen ist größer als die Anzahl der nichttrivialen Zeilen. Dann hat das LGS **unendlich viele Lösungen**.

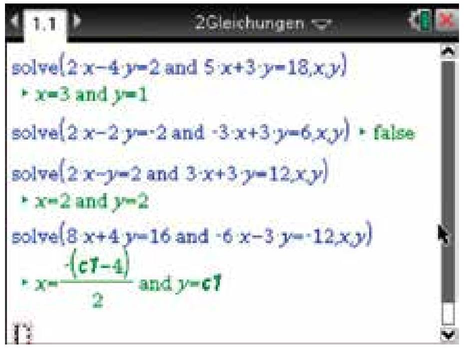
Unterbestimmtes LGS: Das LGS hat weniger Gleichungen als Variable $(m < n)$.
Überbestimmtes LGS: Das LGS hat mehr Gleichungen als Variable $(m > n)$.

CAS-Anwendungen

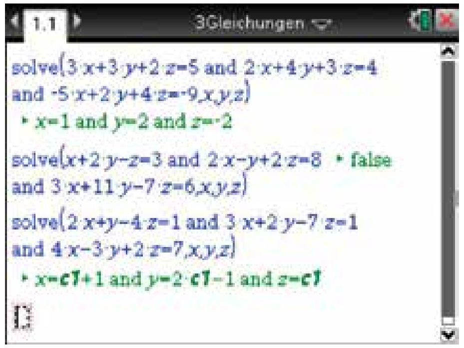
Der solve-Befehl leistet bei der Lösung von Gleichungen gute Dienste.
Er kann ebenso bei der Lösung von Gleichungssystemen angewendet werden.

Beispiel: Lösung von Gleichungssystemen
a) Lösen Sie die 2 × 2-Gleichungssysteme von den Seiten 15 und 17 mit dem CAS.
b) Bearbeiten Sie die 3 × 3-Gleichungssysteme aus den Beispielen der Seiten 20 und 23.
c) Lösen Sie das 3 × 3 Gleichungssystem von S. 20 mit dem simult- und dem rref-Befehl.

Lösung zu a):
Zu berechnen ist die Lösung (x; y) des LGS $2x - 4y = 2$ und $5x + 3y = 18$. Der Befehl solve(2·x−4·y=2 and 5· x+3·y=18x, y) liefert die Lösung x = 3 und y = 1.
Die weiteren Zeilen im nebenstehenden Screenshot zeigen die Ermittlung der Anzahl der Lösungen der Gleichungssysteme von Seite 17 unten.

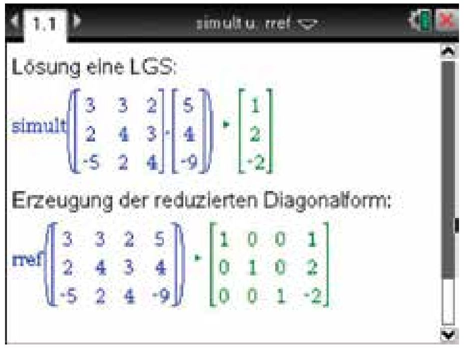


Lösung zu b):
Ausgewählt wurden drei 3 × 3-LGS mit verschiedenen Lösungseigenschaften.
Das Beispiel von Seite 20 besitzt eine eindeutige Lösung.
Das erste LGS aus dem Beispiel von Seite 23 hat keine Lösung, das zweite LGS besitzt eine einparametrige unendliche Lösungsmenge (Parameter *c1*).



Lösung zu c):
Die Koeffizientenmatrix des LGS wird durch [3, 3, 2; 2, 4, 3; 5, 2, 4] wiedergegeben, die rechte Seite durch [5; 4; 9].
Mit simult ([3, 3, 2; 2, 4, 3; −5, 2, 4],
[5; 4; −9]) wird die Lösung [1; 2; −2] geliefert.

Mit rref ([3, 3, 2, 5; 2, 4, 3, 4; −5, 2, 4, −9]), also der Eingabe der erweiterten Matrix, erhält man ein äquivalentes System mit der Lösung in der letzten Spalte.



Test

Lineare Gleichungssysteme

1. Manuelle Lösung eines LGS
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem manuell.

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 4x - 5y = -4 \\ \text{II:} & 5x + 3y = 32 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & x + 2y + z = 1 \\ \text{II:} & 2x + 3y + 3z = 6 \\ \text{III:} & 3x - 4y - 3z = 1 \end{array}$

2. Lösbarkeit
Untersuchen Sie das LGS auf Lösbarkeit.

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y - 2z = 4 \\ \text{II:} & 2x + 3y - 3z = 8 \\ \text{III:} & x + 2y - z = 5 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + 3y + 2z = 3 \\ \text{II:} & 4x + 5y - 2z = 1 \\ \text{III:} & 4x + 4y - 8z = -4 \end{array}$

3. Lineares Gleichungssystem mit Parameter
Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter a auf Lösbarkeit.

$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + 2y = 6 \\ \text{II:} & (a+1)x + y = 4 \end{array}$

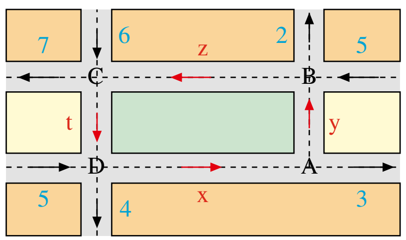
4. Altersrätsel
Die Schwestern Maria, Emma und Julia sind heute zusammen 30 Jahre alt. Vor vier Jahren war Maria doppelt so alt wie Emma und Julia zusammen. Damals war Julia doppelt so alt wie Emma.
Wie alt sind die drei Schwestern heute?

5. Anlagestrategie
Herr Brockmanns möchte 30 000 € für ein Jahr anlegen. Er möchte Aktien, Gold und Fonds kaufen. Seine Bank macht ihm das abgebildete Angebot. Herr Brockmanns möchte im Anlagejahr 2000 € Profit erzielen.

Anlageform	Aktien	Fonds	Gold
Erwartete Rendite	7 %	6 %	5 %

a) Untersuchen Sie, welche Möglichkeiten der Anlage er insgesamt hat.
b) Wie muss er das anzulegende Geld auf Aktien, Fonds und Gold aufteilen, wenn er aus Sicherheitsgründen möglichst viel Gold in sein Depot nehmen will?

6. Straßennetz
Ein Netz von Einbahnstraßen soll teilerneuert werden. Die Durchflussmengen einiger Straßen wurden ermittelt (in 1000 Autos/h).
x, y, z und t seien die Kapazitäten der zu erneuernden Straßen.
a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für x, y, z und t auf.
b) Bestimmen Sie die Minimalkapazitäten der vier zu erneuernden Straßen.



Lösungen: S. 555

Bildnachweis

Technische Zeichnungen
Anton Bigalke; Norbert Köhler

Illustrationen
Cornelsen/Gudrun Lenz; Cornelsen/Karin Mall; Cornelsen/Detlev Schüler

Screenshots
Cornelsen/Felix Arndt/© Texas Instruments. Nutzung mit Genehmigung von Texas Instruments
Cornelsen/Ulf Rothkirch/© Microsoft® Office. Nutzung mit Genehmigung von Microsoft

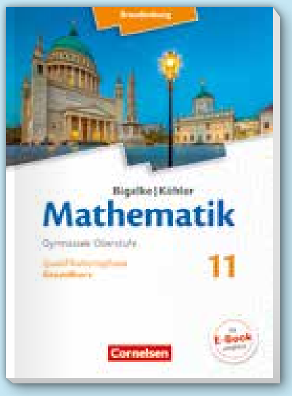
Bildquellen
Cover: bpk/Stiftung Preussische Schlösser und Gärten Berlin-Brandenburg/Michael Lüder; **S. 13:** Imago Stock & People GmbH/Joko; **S. 14:** stock.adobe.com/Tyler Olson; **S. 19:** akg-images; **S. 31:** stock.adobe.com/Tanja Hohnwald; **S. 32/o.:** stock.adobe.com/Dirk Schumann; **S. 32/m.:** stock.adobe.com/ARochau; **S. 32/u.:** stock.adobe.com/baibaz; **S. 33/o.:** Shutterstock.com/Eugene Onischenko; **S. 33/u.:** stock.adobe.com/eyeQ; **S. 37/o.:** stock.adobe.com/exclusive-design; **S. 37/u.:** stock.adobe.com/razihusin; **S. 38:** stock.adobe.com/Dreaming Andy; **S. 39:** stock.adobe.com/V&P Photo Studio; **S. 40/o.:** stock.adobe.com/Kzenon; **S. 40/m. 1:** stock.adobe.com/doris oberfrank-list; **S. 40/m. 2:** stock.adobe.com/rdnzl; **S. 40/u.:** stock.adobe.com/Thaut Images; **S. 42:** akg-images; **S. 43:** stock.adobe.com/U. Gernhoefer; **S. 46:** stock.adobe.com/BeTa-Artworks; **S. 47:** Shutterstock.com/Sinuswelle; **S. 56:** stock.adobe.com/lassedesignen; **S. 58:** Shutterstock.com/photoart985; **S. 61/o.:** Shutterstock.com/2xSamara.com; **S. 61/m.:** Shutterstock.com/suronin; **S. 61/u.:** Shutterstock.com/Kjuuurs; **S. 83:** bpk/Stiftung Preussische Schlösser und Gärten Berlin-Brandenburg/Hagen Immel; **S. 85:** stock.adobe.com/Scanrail; **S. 89:** imago/Imagebroker/Stefan Klein; **S. 90/o.:** stock.adobe.com/contrastwerkstatt; **S. 90/m.:** stock.adobe.com/2happy; **S. 90/u.:** Shutterstock.com/llaszlo; **S. 93:** Shutterstock.com/Suzanne Tucker; **S. 95/o.:** Shutterstock.com/T_Luyten; **S. 95/u.:** Shutterstock.com/Anatoliy Berislavskiy; **S. 96/o.:** Shutterstock.com/SA-Photog; **S. 96/m.:** Shutterstock.com/Vahe 3D; **S. 96/u.:** www.colourbox.de/ssuaphoto; **S. 97/o. 1:** Shutterstock.com/rixxo; **S. 97/o. 2:** Shutterstock.com/neelsky; **S. 97/m.:** stock.adobe.com/gradt; **S. 104:** Shutterstock.com/Michael Wiggenhauser; **S. 105/o.:** Shutterstock.com/Josemaria Toscano; **S. 105/u.:** stock.adobe.com/alestraza; **S. 106/o.:** Stutterstock/Esteban De Armas; **S. 106/m.:** dpa picture-alliance; **S. 106/u.:** Shutterstock.com/Luna Vandoorne; **S. 121:** stock.adobe.com/MTG; **S. 123/Schild:** Shutterstock.com/Morgar; **S. 123/Rennauto:** Shutterstock.com/Digital Storm; **S. 123/Hund:** Shutterstock.com/Dora Zett; **S. 124:** Shutterstock.com/risteski goce; **S. 127:** Shutterstock.com/Panda Vector; **S. 128/Auto:** Shutterstock.com/Yuri Schmidt; **S. 128/Snowboardfahrer:** Shutterstock.com/tale; **S. 135:** Cornelsen/Dieter Ruhmke; **S. 138:** mauritius images/Phototake/Michael Carroll

Die Ausgaben im Überblick für Brandenburg

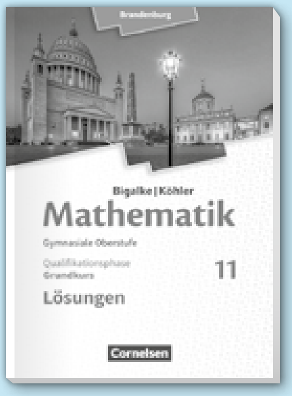
Neue Materialien für die 11. Klasse

Passgenau zum Lehrplan

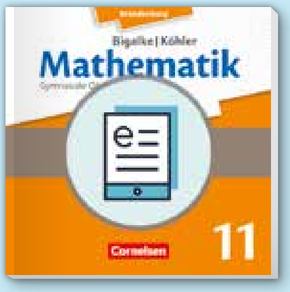
NEU Bigalke/Köhler: Mathematik
Ausgabe Brandenburg
11. Schuljahr Grundkurs



Schülerbuch Grundkurs
Kartoniert
978-3-06-040666-1 ◕ 25,25

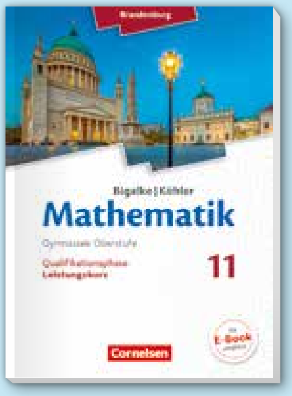


Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert (September 2019)
978-3-06-040670-8 19,25

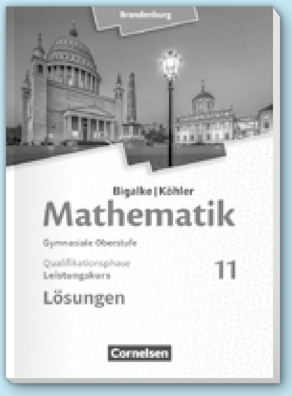


Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de
978-3-06-040970-9 ○ 8,99

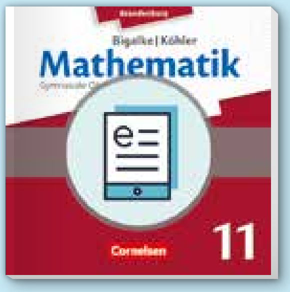
NEU Bigalke/Köhler: Mathematik
Ausgabe Brandenburg
11. Schuljahr Leistungskurs



Schülerbuch Leistungskurs
Kartoniert (Oktober 2019)
978-3-06-040668-5 ◕ 26,25



Lösungen zum Schülerbuch
Kartoniert (Oktober 2019)
978-3-06-040672-2 19,25



Schülerbuch – E-Book
Einzellizenz/1 Jahr/scook.de (Okt. 2019)
978-3-06-040971-6 ○ 8,99

Service Center
Telefon: 0800 12 120 20 (kostenlos aus dem dt. Festnetz)
+49 30 897 85-640 (Mobilfunknetz / Ausland)
Mo – Fr 8 – 18 Uhr (außerhalb dieser Zeit erreichen Sie unsere automatische Bestellannahme)
Fax: +49 30 897 85-578
E-Mail: service@cornelsen.de

Cornelsen Verlag
14328 Berlin
cornelsen.de

Zeichenerklärungen

- ◕ Zur Prüfung für Lehrkräfte mit 20 % Ermäßigung
- ☐ Abgabe nur gegen Schulstempel an Fachlehrer/-innen zum vollen Preis
- ◇ Unverbindliche Preisempfehlung
- ○ Nur direkt beim Verlag, nicht über den Handel zu beziehen

Preisangaben in € (D), Stand 1. 01. 2019. Preisänderung und Irrtum vorbehalten. Alle Preise enthalten die zzt. geltende Mehrwertsteuer.

P9702306 VBD 0819